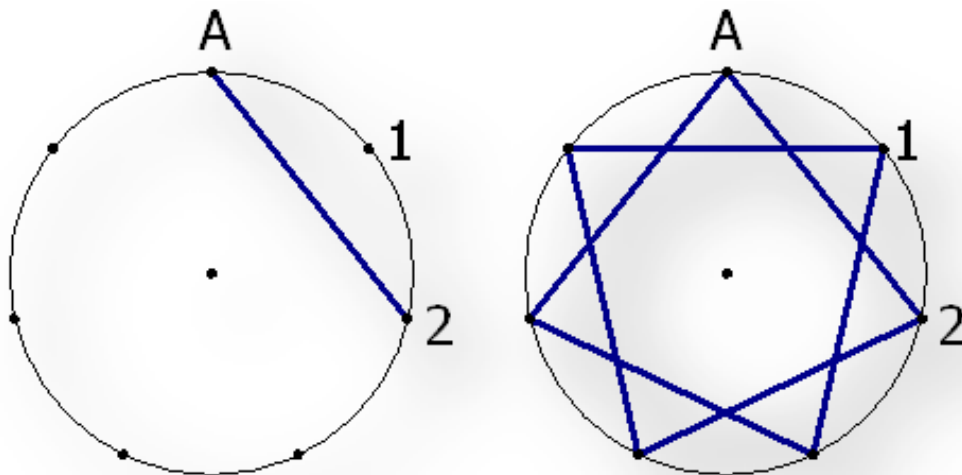


ดาวประกาย (Star Polygons)

เมื่อกำหนดจุดจำนวน 7 จุด บนเส้นรอบวงของวงกลม ให้มีระยะห่างเท่า ๆ กัน กำหนดจุด A ให้เป็นจุดเริ่มต้น ลากส่วนของเส้นตรงจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดที่นับหรือก้าวต่อไปเป็นจุดที่ 2 ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา แล้วลากส่วนของเส้นตรงต่อไปยังจุดที่ก้าวต่อไปเป็นจุดที่ 2 ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เช่นนี้เรื่อยไป จนกระทั่งลากส่วนของเส้นตรงกลับมาสิ้นสุดยังจุดเริ่มต้น จะพบว่าได้ภาพแปลกตาน่าสนใจ ดังนี้

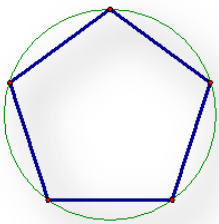


จะขอเรียกรูปในลักษณะเช่นนี้ว่า ดาวประกาย (star polygons) จากข้างต้นได้รูปดาวประกาย 7 แฉก น่าสนใจว่า ในการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด ถ้าลากส่วนของเส้นตรงไปยังจุดที่ก้าวต่อไปเป็นจำนวนอย่างอื่นที่ไม่ใช่ 2 ก้าว เช่น ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดที่ก้าวต่อไปเป็นจุดที่ 3 ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา แล้วลากส่วนของเส้นตรงต่อไปยังจุดที่ก้าวต่อไปเป็นจุดที่ 3 ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เช่นนี้เรื่อยไป จนกระทั่งลากส่วนของเส้นตรงกลับมาสิ้นสุดยังจุดเริ่มต้น (ถ้าทำได้) จะได้ภาพดาวประกายที่มีลักษณะอย่างไร หรือ เมื่อเปลี่ยนแปลงจำนวนจุดแบ่งบนเส้นรอบวงของวงกลมเป็นอย่าง

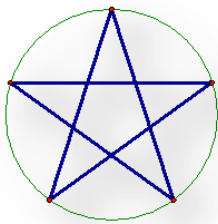
อื่นที่ไม่ใช่ 7 ส่วน แล้วดำเนินการในทำนองเดียวกัน จะได้ภาพดาวประกายที่มีลักษณะอย่างไร และนำศึกษาว่าการเกิดรูปดาวประกายลักษณะต่าง ๆ ขึ้นอยู่กับกฎเกณฑ์หรือเงื่อนไขใดบ้าง

การสร้างรูปดาวประกายโดยทั่วไปอาจเริ่มจากการเขียนวงกลม กำหนดจำนวนจุดแบ่งให้มีจำนวนตั้งแต่ 3 จุดขึ้นไป แต่ละจุดให้มีระยะห่างเท่า ๆ กัน กำหนดจำนวนก้าวในการลากส่วนของเส้นตรงจากจุดแรกไปยังจุดต่อ ๆ ไป แล้วลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมโยงจุดจนกระทั่งกลับมาถึงจุดเริ่มต้น ในกรณีที่ยังมีจุดบนเส้นรอบวงเหลืออยู่ ให้เริ่มต้นลากส่วนของเส้นตรงใหม่จากจุดที่ว่างอยู่ซึ่งอยู่ถัดไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

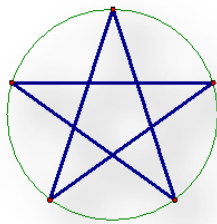
เช่น รูปดาวประกาย 5 แฉก สร้างจากการกำหนดจุด 5 จุดที่มีระยะห่างเท่ากันบนเส้นรอบวงของรูปวงกลม กำหนดจำนวนก้าวในการลากส่วนของเส้นตรงจากจุดแรกไปยังจุดต่อไป เป็น 1, 2, 3 และ 4 ก้าว ครึ่งละ 1 กรณี แล้วลากส่วนของเส้นตรงสร้างดาวประกายหลายแฉก จะได้รูปดังนี้



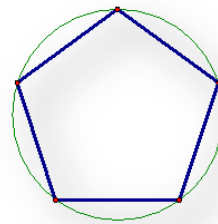
5/1



5/2



5/3



5/4

ข้อกำหนดข้อตกลงในการเรียกชื่อดังนี้

รูปแรกด้านซ้ายมือ เรียกว่า ดาวประกาย 5/1 ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดที่นับหรือก้าวต่อไปเป็นจุดที่ 1 และลากต่อ ๆ ไปยังจุดที่นับใหม่ต่อไปเป็นจุดที่ 1 เช่นนี้เรื่อยไป จนกระทั่งกลับมาถึงจุดเริ่มต้น จะได้รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

รูปที่สองเรียกว่า ดาวประกาย 5/2 ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดที่นับหรือก้าวต่อไปเป็นจุดที่ 2 และลากต่อไปยังจุดที่นับต่อไปเป็นจุดที่ 2 เช่นนี้เรื่อยไป จนกระทั่งกลับมาถึงจุดเริ่มต้น ได้รูปดาวห้าแฉก

และในทำนองเดียวกันจะได้ดาวประกาย 5/3 และ ดาวประกาย 5/4 เมื่อกำหนดจุดแบ่งบนเส้นรอบวงของวงกลม 5 จุด จะได้ดาวประกายทั้งหมด 4 รูป

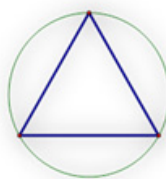
มีข้อสังเกตว่า ทุกกรณีสามารถลากส่วนของเส้นตรงจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดอื่น ๆ และลากกลับมาถึงจุดเริ่มต้นได้ โดยลากผ่านครบทั้ง 5 จุด ดาวประกาย 5/1 กับ 5/4 ดาวประกาย 5/2 กับ 5/3 แต่ละคู่มีรูปเหมือนกัน

ในกรณีทั่วไป รูปดาวประกาย n แฉก สร้างจากการกำหนดจุดจำนวน n จุด ที่มีระยะห่างเท่ากันบนเส้นรอบวงของวงกลม ดาวประกาย n/d โดยที่ $n > d$ ได้จากการกำหนดจำนวนก้าว d ก้าว แล้วลากส่วนของเส้นตรงจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดที่นับหรือก้าวต่อไปเป็นจุดที่ d และลากต่อ ๆ ไปยังจุดที่นับหรือก้าวต่อไปเป็นจุดที่ d เช่นนี้เรื่อยไป จนกระทั่งกลับมาถึงจุดเริ่มต้น (ถ้าทำได้) ในกรณีที่ยังมีจุดบนเส้นรอบวงเหลืออยู่ ให้เริ่มต้นลากส่วนของเส้นตรงใหม่จากจุดที่ว่างซึ่งอยู่ถัดไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

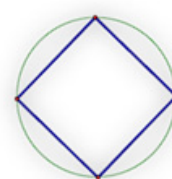
ให้ทดลองสร้างรูปดาวประกายรหัสอื่น ๆ เช่น 3/1, 3/2, 4/1, 4/2, 4/3, 6/1, 6/2, 6/3, 6/4, 6/5, 7/1, 7/2, 7/3, 7/4, 7/5, 7/6, 9/1, 9/2, 9/3, 9/4, 9/5, 9/6, 9/7, 9/8 แล้วสังเกตผลที่ได้ จากนั้นวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของจำนวนจุดแบ่งและจำนวนก้าวในการลากส่วนของเส้นตรงกับลักษณะของรูปที่เกิดขึ้น นอกจากนี้ยังสามารถสร้างงานประดิษฐ์ที่เกี่ยวข้องกับรูปดาวประกาย

ตัวอย่างผลการสร้างดาวประกายแบบต่าง ๆ

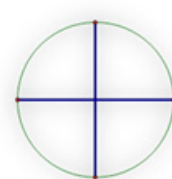
1. ดาวประกาย 3 แฉก ได้รูปสามเหลี่ยม
2. ดาวประกาย 4 แฉก ได้รูปสี่เหลี่ยม และ ได้รูปเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม 2 เส้นตัดกัน



3/1, 3/2



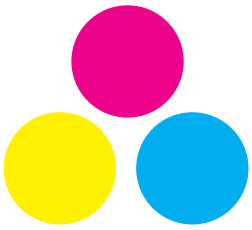
4/1, 4/3



4/2

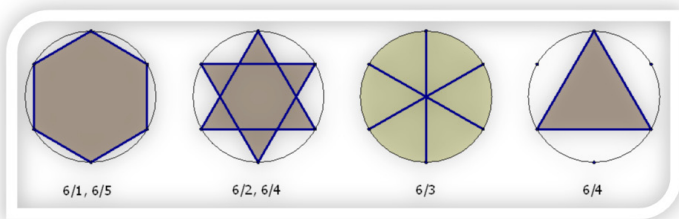
ข้อสังเกต

- ดาวประกาย 3/1 และ 3/2 เป็นรูปสามเหลี่ยมเช่นเดียวกัน และ $1+2 = 3$
- ดาวประกาย 4/1 และ 4/3 เป็นรูปสี่เหลี่ยมเช่นเดียวกัน และ $1+3 = 4$
- ดาวประกาย 4/2 ไม่สามารถลากส่วนของเส้นตรงไปยัง



จุดบนเส้นรอบวงได้ครบทุกจุดในการลากครั้งแรก ต้องเริ่มต้นลากส่วนของเส้นตรงใหม่จากจุดที่อยู่ถัดไป และพบว่า ห.ร.ม. ของ 4 และ 2 คือ 2

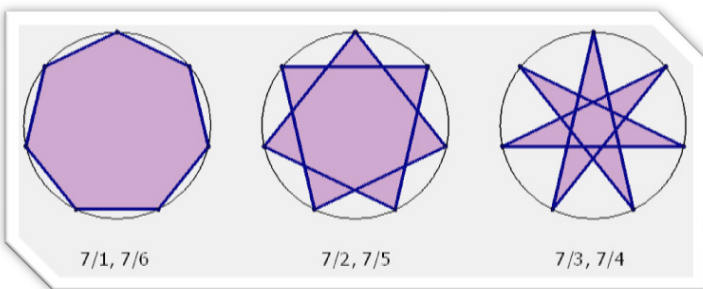
3. ดาวประกาย 6 แฉก ได้รูปลักษณะต่าง ๆ ดังนี้



ข้อสังเกต

- ดาวประกาย 6/1 และ 6/5 เป็นรูปหกเหลี่ยมเช่นเดียวกัน และ $1+5 = 6$
- ดาวประกาย 6/2 และ 6/4 เป็นรูปดาวที่ประกอบด้วยรูปสามเหลี่ยมสองรูปซ้อนทับกัน โดยต้องเริ่มต้นลากส่วนของเส้นตรง 2 ครั้ง พบว่า $1+5 = 6$ และ ห.ร.ม. ของ 6 และ 2 คือ 2, ห.ร.ม. ของ 6 และ 3 คือ 3
- ดาวประกาย 6/3 ประกอบด้วยเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม 3 เส้น โดยต้องเริ่มต้นลากใหม่ทั้ง 3 ครั้ง และพบว่า ห.ร.ม. ของ 6 และ 3 คือ 2

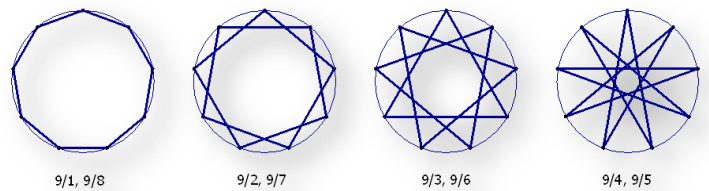
4. ดาวประกาย 7 แฉก ได้รูปลักษณะต่าง ๆ ดังนี้



ข้อสังเกต

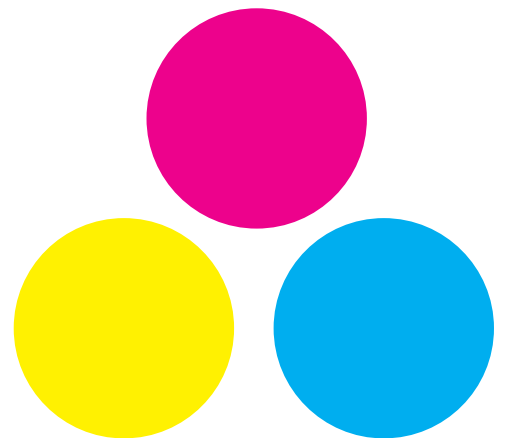
- ดาวประกาย 7/1 และ 7/6 เป็นรูปเจ็ดเหลี่ยมเช่นเดียวกัน และ $1+6 = 7$
- ดาวประกาย 7/2 และ 7/5 เป็นรูปดาวอ้วนเช่นเดียวกัน และ $2+5 = 7$
- ดาวประกาย 7/3 และ 7/4 เป็นรูปดาวผอมเช่นเดียวกัน และ $3+4 = 7$
- ดาวประกาย 7 แฉก แต่ละรูปร่างได้โดยลากส่วนของเส้นตรงจากจุดเริ่มต้นเพียงจุดเดียวแล้วลากต่อไปได้จนกระทั่งกลับมาที่จุดเริ่มต้นได้โดยไม่ยกปากกา

5. ดาวประกาย 9 แฉก ได้รูปลักษณะต่าง ๆ ดังนี้



ข้อสังเกต

- ดาวประกาย 9/1 และ 9/8 เป็นรูปเก้าเหลี่ยมเช่นเดียวกัน และ $1+8 = 9$
- ดาวประกาย 9/2 และ 9/7 เป็นรูปดาวอ้วนเช่นเดียวกัน และ $2+7 = 9$
- ดาวประกาย 9/3 และ 9/6 เป็นรูปดาวที่ประกอบด้วยรูปสามเหลี่ยมสามรูปซ้อนทับกัน โดยต้องเริ่มต้นลากส่วนของเส้นตรง 3 ครั้ง พบว่า $3+6 = 9$ และ ห.ร.ม. ของ 9 และ 3 คือ 3, ห.ร.ม. ของ 9 และ 6 คือ 3
- ดาวประกาย 9/4 และ 9/5 เป็นรูปดาวผอมเช่นเดียวกัน และ $4+5 = 9$





งานประดิษฐ์ที่เกี่ยวข้องกับรูปดาวประกาย

ผลการศึกษาดาวประกายสามารถนำไปสู่การสร้างสรรคงานประดิษฐ์ เช่น การเขียนรูป งานเย็บปักถักร้อย และนำไปประยุกต์ใช้กับการสร้างงานประดิษฐ์จากผลบวกของเลขโดดของผลคูณจากสูตรคูณ ดังเช่น ผลงานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนราชินีบูรณะ นครปฐม

- ดาวประกาย n/d แต่ละรูปสร้างได้โดยลากส่วนของเส้นตรงจากจุดเริ่มต้นเพียงจุดเดียวแล้วลากต่อไปได้จนกระทั่งกลับมาที่จุดเริ่มต้นได้โดยไม่ยกปากกา เมื่อ ห.ร.ม. ของ n และ d คือ 1 กล่าวคือเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ซึ่งกันและกัน
- ดาวประกาย n/d แต่ละรูปสร้างได้โดยต้องยกปากกามากกว่าหนึ่งครั้งเพื่อเริ่มต้นใหม่ เมื่อ ห.ร.ม. ของ n และ d ไม่เท่ากับ 1 กล่าวคือไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ซึ่งกันและกัน

ข้อค้นพบ

ดาวประกาย n/d ซึ่งได้จากการกำหนดจุด n จุด ที่มีระยะห่างเท่ากันบนรูปวงกลม แล้วลากส่วนของเส้นตรงจากแต่ละจุดไปยังจุดที่ก้าวต่อไปเป็นจุดที่ d และต่อ ๆ ไป มีข้อค้นพบดังนี้

- 1) ดาวประกาย $n/1$ และ ดาวประกาย $n/(n - 1)$ มีลักษณะเป็นรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า เช่น ดาวประกาย $5/1$ กับ ดาวประกาย $5/4$ มีลักษณะเป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
 - 2) ดาวประกาย n/d และ ดาวประกาย $n/(n - d)$ มีรูปเป็นเหมือนกัน เช่น ดาวประกาย $6/2$ และ $6/4$ มีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าสองรูปซ้อนทับกัน ดาวประกาย $7/3$ และ $7/4$ มีลักษณะเป็นรูปดาว 7 แฉก
 - 3) ถ้า ห.ร.ม. ของ n และ d เท่ากับ 1 กล่าวคือเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ซึ่งกันและกัน จะได้ว่าดาวประกาย n/d สร้างได้โดยลากส่วนของเส้นตรงจากจุดเริ่มต้นเพียงจุดเดียวแล้วลากต่อไปได้จนกระทั่งกลับมาที่จุดเริ่มต้นได้โดยไม่ยกปากกา เช่น ดาวประกาย $5/2, 6/5, 9/4$
- ถ้า ห.ร.ม. ของ n และ d ไม่เท่ากับ 1 จะได้ว่าดาวประกาย n/d สร้างได้โดยต้องยกปากกามากกว่าหนึ่งครั้งเพื่อเริ่มต้นใหม่ เช่น ดาวประกาย $4/2, 6/2, 6/3, 9/3, 9/6$



นอกจากนี้ยังสามารถศึกษาให้ลุ่มลึกยิ่งขึ้นนำไปสู่การทำโครงการดาวประกาย โดยอาจกำหนดจุดประสงค์ของโครงการ เช่น

- เพื่อสำรวจรูปดาวประกายลักษณะต่าง ๆ
- เพื่อค้นหากฎเกณฑ์หรือเงื่อนไขในการทำให้เกิดรูปดาวประกายลักษณะต่าง ๆ
- เพื่อสร้างงานประดิษฐ์เกี่ยวกับรูปกับดาวประกาย

กิจกรรมดาวประกายมีความเชื่อมโยงกับคณิตศาสตร์หลายเรื่อง อาทิ วิธีการกำหนดจุดให้มีระยะห่างเท่า ๆ กันบนเส้นรอบวงของวงกลม แบบรูป ห.ร.ม. จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และเชื่อมโยงกับการสร้างสรรค์งานทางด้านศิลปะ ช่วยพัฒนาสมองทั้งสองด้านของผู้ศึกษาไปพร้อม ๆ กัน 