ดร.อลงกต ใหม่ด้วง
นักวิชาการ สาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนต้น สสวท/ e-mail: amaid@ipst.ac.th

ความน่าจะเป็นที่ไม่น่าจะเป็น ลองเล่นเห็นได้ด้วยคณิตศาสตร์

วิธีการหนึ่งในการทำให้ผู้เรียนเห็นถึงความสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ คือ การแสดงให้เห็นถึงสถานการณ์หรือปัญหาบางอย่างที่สามัญสำนึกของผู้คนทั่วไปอาจชวนให้คาดการณ์คำตอบในทางหนึ่ง ซึ่งผิดไปจากผลลัพธ์จากการคำนวณทางคณิตศาสตร์จริง ๆ สถานการณ์เช่นนี้มักเรียกกันว่า 'ปฏิทรรศน์ทางคณิตศาสตร์' หรือ 'Mathematical Paradox' ซึ่งในบทความนี้จะนำเสนอสถานการณ์ 'ปฏิทรรศน์ทางคณิตศาสตร์' เกี่ยวกับความน่าจะเป็นสามสถานการณ์ ซึ่งครูผู้สอนสามารถนำไปใช้เป็นกรณีอภิปรายกับผู้เรียนในชั้นเรียนได้ เพื่อแสดงถึงประโยชน์ของหลักการต่าง ๆ เกี่ยวกับความน่าจะเป็นที่ได้เรียนมา

1 ปฏิทรรศน์วันเกิด (Birthday Paradox) กับกิจกรรมคำถาม 'เพื่อนร่วมชะตา'

สำหรับการนำเสนอปฏิทรรศน์วันเกิด ผู้สอนสามารถเริ่มต้นด้วยกิจกรรมคำถาม 'เพื่อนร่วมชะตา' โดยกำหนดนิยามของ 'เพื่อนร่วมชะตา' ว่า หมายถึง เพื่อนที่เกิดวันและเดือนเดียวกัน แต่ไม่จำเป็นต้องเป็น พ.ศ. เดียวกัน โดยก่อนเริ่มกิจกรรมผู้สอนอาจสอบถามผู้เรียนก่อนว่ามีใครเกิดวันที่ 29 กุมภาพันธ์ ซึ่งถือเป็นกรณีพิเศษบ้าง และหากมีผู้เรียนที่เกิดในวันที่ 29 กุมภาพันธ์ ครูอาจมอบหมายให้ผู้เรียนผู้นั้นเป็นผู้ช่วยครูในการบันทึกผลของกิจกรรมแทน จากนั้นครูผู้สอนอาจเริ่มต้นตั้งคำถามว่าจากจำนวนผู้เรียนที่เหลือทั้งหมด สมมติให้มีจำนวน 50 คน ความน่าจะเป็นที่จะมี 'เพื่อนร่วมชะตา' หรือผู้เรียนที่เกิดวันและเดือนเดียวกันอย่างน้อย 1 คู่ จะมากหรือน้อยกว่ากึ่งหนึ่งหรือ 0.5 ทั้งนี้ครูอาจให้ผู้เรียนร่วมกันพิจารณาจำนวนวันเกิดทั้งหมดที่เป็นไปได้ นั่นคือ 365 วัน (โดยไม่นับวันที่ 29 กุมภาพันธ์ ซึ่งถือเป็นกรณีพิเศษและมีโอกาสเกิดขึ้นน้อยกว่าวันอื่น ๆ) กับจำนวนผู้เรียนคือ 50 คน ว่ามีผลต่อความน่าจะเป็นอย่างไร ก่อนจะให้ผู้เรียนแต่ละคนสรุปคำตอบของตนเอง ซึ่งในสถานการณ์ปฏิทรรศน์วันเกิดนี้ หากใช้สามัญสำนึกโดยทั่วไปในการพิจารณา คนส่วนใหญ่จะรู้สึกว่า จากจำนวนผู้เรียนเพียง 50 คน กับจำนวนวันเกิดที่เป็นไปได้หลากหลายถึง 365 วัน โอกาสที่จะมีคนที่เกิดวันและเดือนเดียวกันไม่น่าจะสูง และจะให้คำตอบว่าความน่าจะเป็นควรจะน้อยกว่ากึ่งหนึ่ง

หลังจากผู้เรียนแต่ละคนเขียนคำตอบพร้อมเหตุผลของตนเองแล้ว ผู้สอนอาจทดลองตรวจสอบคำตอบจากสถานการณ์จริงโดยให้ผู้เรียนในชั้นบอกข้อมูลไปตามลำดับว่า มีใครเกิดในเดือน มกราคม กุมภาพันธ์ มีนาคม . . . ไปตามลำดับบ้าง และในแต่ละเดือนมีใครเกิดวันที่เท่าใดบ้าง พร้อมทั้งให้ผู้เรียน ผู้ช่วยหรือ ผู้สอนเองบันทึกบนกระดานเพื่อสำรวจว่ามีกรณีที่ผู้เรียนสองคนหรือมากกว่าเกิดในวันเดียวกันหรือไม่ ก่อนจะสรุปการทดลองว่ามีหรือไม่มี 'เพื่อนร่วมชะตา' ในชั้นเรียนนั้น

ซึ่งจากหลักของความน่าจะเป็นแล้ว ควรจะมีผู้เรียนอย่างน้อยหนึ่งคู่ที่เกิดวันเดียวกัน เนื่องจากความน่าจะเป็นที่จะมี 'เพื่อนร่วมชะตา' สำหรับชั้นเรียนที่มีจำนวนผู้เรียน 50 คน มีค่าสูงถึง 97% โดยครูอาจแสดงการพิจารณาและการคำนวณความน่าจะเป็นดังนี้

ในการหาค่าความน่าจะเป็นที่ผู้เรียนจำนวน 50 คน มีอย่างน้อย 1 คู่ที่เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน โดยพิจารณาให้โอกาสในการเกิดวันและเดือนต่าง ๆ ของนักเรียนมีค่าเท่ากันตลอดทั้ง 365 วัน อาจคำนวณได้จากความน่าจะเป็นในกรณีทั่วไปที่ผู้เรียนจำนวน n คน มีวันเกิดที่แตกต่างกันทั้งหมดแล้วนำไปลบจาก 1 โดยความน่าจะเป็นที่ผู้เรียนจำนวน n คนมีวันเกิดที่ไม่ซ้ำกันเลยสามารถหาได้จาก

ความน่าจะเป็นผู้เรียน n คนมีวันเกิดไม่ซ้ำกันเลย

$$= \frac{365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365-n+1)}{365^n}$$

ทั้งนี้เนื่องจากหากมีผู้เรียนเกิดในวันใดแล้ว คนถัด ๆ ไปจะไม่สามารถมีวันเกิดในวันนั้นได้อีก ดังนั้นจำนวนวิธีที่ผู้เรียนจำนวน n คนมีวันเกิดที่ไม่ซ้ำกันเลยจะมี 365 x 364 x 363 x ... x (365 – n + 1) วิธี และเมื่อเทียบกับจำนวนวิธีที่ผู้เรียนจำนวน n คนจะเกิดในวันต่าง ๆ ซึ่งมีทั้งหมด 365^n วิธี แล้ว จะได้ความน่าจะเป็นออกมาตามสูตรข้างต้น

ดังนั้นสำหรับนักเรียนจำนวน 50 คน
ความน่าจะเป็นที่นักเรียน 50 คนมีวันเกิดไม่ซ้ำกันเลย

$$= \frac{365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365-50+1)}{365^{50}}$$

$$= \frac{365 \times 364 \times 363 \times .. \times 316}{365^{50}}$$

$$= 0.0296$$

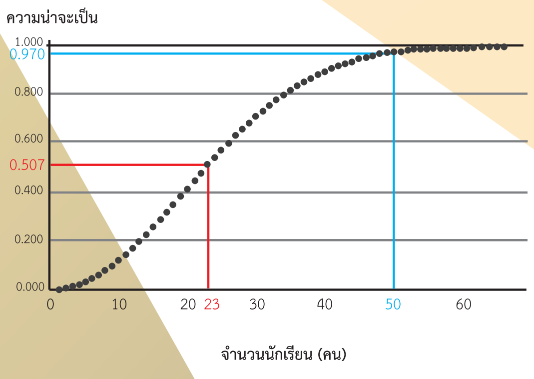
นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ผู้เรียน 50 คนมีเพื่อนร่วมชะตาอย่างน้อย 1 คู่ = 1 – 0.0296
= 0.9704
หรือ 97.04%

จากนั้นผู้สอนอาจนำสูตรการคำนวณหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนจำนวน n คนมีเพื่อนร่วมชะตา คือ

ความน่าจะเป็นที่นักเรียน n คนมีเพื่อนร่วมชะตา

$$= 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365-n+1)}{365^n}$$

ไปเขียนกราฟระหว่างจำนวนนักเรียน n คน กับความน่าจะเป็นที่จะมีเพื่อนร่วมชะตา จะได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนนักเรียน n คน กับความน่าจะเป็นที่จะมีเพื่อนร่วมชะตา (ที่มา: http://mathforum.org/mathimages/index.php/The_Birthday_Problem)

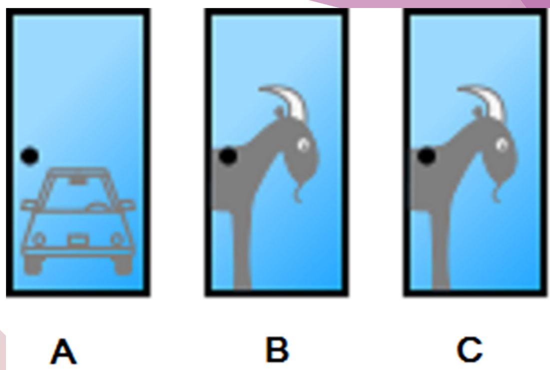
แล้วร่วมกันอภิปรายกับผู้เรียนว่าเหตุใดกราฟจึงมีลักษณะเช่นนี้ และตั้งคำถามเพิ่มเติมว่าจะต้องมีจำนวนผู้เรียนเท่าใดจึงจะทำให้ความน่าจะเป็นที่จะมีเพื่อนร่วมชะตามากกว่ากึ่งหนึ่ง หรือ 0.5 ตามที่ได้ตั้งคำถามนำไว้ ซึ่งคำตอบคือต้องมีจำนวนผู้เรียนตั้งแต่ 23 คนขึ้นไป

อย่างไรก็ดี หากการทดลองสำรวจหา ‘เพื่อนร่วมชะตา’ ของผู้เรียนทั้งชั้นเรียนจำนวน 50 คน พบว่าไม่มีใครที่เกิดวันและเดือนเดียวกันเลย ครูอาจอธิบายว่ากรณีนี้ยังสามารถเกิดขึ้นได้เนื่องจากมีความน่าจะเป็นเท่ากับหนึ่งลบด้วยความน่าจะเป็นที่จะมีเพื่อนร่วมชะตาอย่างน้อยหนึ่งคู่ หรือ 1 – 0.9704 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.0296 หรือประมาณ 2.96% ที่แม้จะมีค่าน้อยแต่ก็ยังมากกว่า 0 และมีโอกาสเป็นไปได้ และหากมีการสุ่มผู้เรียนจำนวน 50 คน หลาย ๆ ครั้งมากขึ้น โอกาสที่จะมี ‘เพื่อนร่วมชะตา’ ควรจะสูงกว่าโอกาสที่ไม่มี ‘เพื่อนร่วมชะตา’

กิจกรรมนี้ สามารถแสดงให้เห็นได้ว่าการคำนวณทางคณิตศาสตร์มีส่วนช่วยให้เราประเมินสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างแม่นยำกว่าการคาดการณ์ด้วยสามัญสำนึก ซึ่งกิจกรรมนี้เป็นกิจกรรมที่สามารถมองเห็นภาพได้ง่าย ใกล้ตัว และผู้เรียนทุกคนสามารถมีส่วนร่วม โดยสามารถนำไปปรับใช้กับห้องเรียนที่มีจำนวนผู้เรียนเท่าใดก็ได้โดยอาศัยสูตรทั่วไปในการหาความน่าจะเป็นเป็นเครื่องมือช่วยในการคำนวณ

2 ปฏิทรรศน์มอนตีฮอลล์ (Monty Hall Paradox) กับกิจกรรมเกม ‘ประตูดวง’

ปฏิทรรศน์มอนตีฮอลล์ เป็นปฏิทรรศน์คณิตศาสตร์ที่มีที่มาจากเกมโชว์ทางโทรทัศน์ชื่อ Let’s Make a Deal ที่เคยออกอากาศจริงในสหรัฐอเมริกา เมื่อช่วงปี ค.ศ. 1984-1986 โดยชื่อปฏิทรรศน์มอนตีฮอลล์ ก็คือ ชื่อของ พิธีกรรายการเกมโชว์นี้นั่นเอง กติกาของเกมโชว์ Let’s Make a Deal หรือเกม ‘ประตูดวง’ มีอยู่ว่า มีประตูที่มีลักษณะเหมือนกันอยู่ 3 บานคือ ประตู A B และ C โดยด้านหลังประตูทั้งสามนี้จะมีประตูเพียงบานเดียวที่มีรถยนต์ ซึ่งเป็นของรางวัลใหญ่อยู่ และอีกสองบานที่เหลือจะมีแพะเป็นรางวัลปลอบใจ ผู้เข้าแข่งขันสามารถเลือกประตูบานใดก็ได้ 1 บาน จากนั้นพิธีกรจะเลือกเปิดประตูที่มีแพะ 1 บาน แล้วถามผู้เข้าแข่งขันว่าจากประตูสองบานที่เหลือ เขาจะเปลี่ยนใจในการเลือกประตูหรือไม่ ถ้าคุณเป็นผู้เข้าแข่งขันควรเลือกเปลี่ยนประตูหรือไม่เปลี่ยนประตู เพราะเหตุใด



รูปที่ 2 เกมประตูดวงจากปฏิทรรศน์มอนตีฮอลล์ (ที่มา: http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem)

รูปที่ 2 แสดงตัวอย่างของเกมประตูดวง โดยสมมติให้รถยนต์อยู่ที่ประตู A และให้ผู้แข่งขันเลือกประตูนี้ จากนั้นคุณมอนตีฮอลล์จะเลือกเปิดประตูซึ่งไม่มีรถยนต์ ซึ่งจะเลือกได้ 2 บานคือบาน B และบาน C โดยสมมติให้คุณมอนตีฮอลล์เลือกเปิดประตู C ผู้เข้าแข่งขันจะได้รับโอกาสในการตัดสินใจอีกครั้งว่าจะยังเลือกประตู A หรือจะเปลี่ยนเป็นประตู B ผู้เข้าแข่งขันควรจะเปลี่ยนใจหรือไม่

จากปฏิทรรศน์มอนตีฮอลล์ในเกมประตูดวงนี้ หากใช้สามัญสำนึกโดยทั่วไปในการพิจารณา คนส่วนใหญ่จะตอบว่าไม่จำเป็นต้องเปลี่ยนใจเลือกประตูใหม่ เพราะโอกาสที่จะเลือกประตูได้ถูกต้องและได้รับรางวัลใหญ่ยังคงเป็น $\frac{1}{3}$ เช่นเดิม แต่หากลองใช้หลักคณิตศาสตร์ด้านความน่าจะเป็นมาช่วยในการคำนวณแล้ว จะพบว่า การเลือดเปลี่ยนประตูจะทำให้โอกาส ที่จะชนะเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า ดังนั้นผู้แข่งขันควรเลือกเปลี่ยนประตูในทุกกรณีหลังจากที่พิธีกรได้เปิดประตูเฉลยออกมาแล้วหนึ่งบานและถามว่าจะเปลี่ยนใจหรือไม่เกมประตูดวงนี้นับเป็นเกมที่สร้างความพิศวงทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมาก เพราะแม้แต่บรรดานักคณิตศาสตร์ หรือครูอาจารย์ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์เอง ก็ยังมีความรู้สึกที่ขัดแย้งกับความน่าจะเป็นที่คำนวณได้จริง และมักตอบว่าไม่จำเป็นต้องเปลี่ยนบานประตู ซึ่งปัญหานี้เคยเป็นที่ถกเถียงและอธิบายกันอย่างกว้างขวางในวารสารทางคณิตศาสตร์ทั้งหลาย และเป็นตัวอย่างอันดีที่แสดงให้เห็นว่าบางครั้งสามัญสำนึกก็อาจลวงให้เราประเมินสถานการณ์ผิดพลาดไปได้อย่างง่าย ๆ เลยทีเดียว การคำนวณความน่าจะเป็นที่จะชนะของเกมประตูดวงสามารถแสดงโดยแบ่งออกเป็นสองกรณีใหญ่ ๆ ดังนี้

กรณี 1: อย่างไรก็ไม่เปลี่ยนใจ

สำหรับกรณีที่ผู้เข้าแข่งขันไม่ยอมเปลี่ยนใจ โอกาสที่จะแพ้หรือชนะจะขึ้นอยู่กับการเลือกประตูในครั้งแรกเท่านั้น เพราะการเปิดประตูเฉลยและการเปิดโอกาสให้เปลี่ยนใจจากพิธีกรจะไม่มีผลใด ๆ ต่อไป เนื่องจากผลลัพธ์ของการเปิดประตูจากการเลือกประตูในครั้งแรกอาจเป็น แพะตัวที่หนึ่ง แพะตัวที่สอง หรือรถยนต์ ด้วยโอกาสที่เท่า ๆ กันดังนั้นความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าแข่งขันจะชนะ นั่นคือเลือกประตูที่มีรถยนต์ถูกต้องครั้งแรกแล้วไม่เปลี่ยนใจจึงเป็น $\frac{1}{3}$ และความน่าจะเป็นที่จะแพ้ นั่นคือเลือกประตูที่มีแพะตัวที่หนึ่งหรือตัวที่สองครั้งแรกแล้วไม่เปลี่ยนใจจึงเป็น $\frac{2}{3}$

กรณี 2: อย่างไรก็จะเลือกประตูใหม่

สำหรับกรณีที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกที่จะเปลี่ยนใจ การเล่นเกมจะแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอนย่อย ๆ ดังนี้

1) ผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูครั้งแรก

2) พิธีกรเลือกเปิดประตูที่มีแพะให้หนึ่งบานแล้วถามผู้เข้าแข่งขันว่าจะเปลี่ยนใจหรือไม่

3) ผู้เข้าแข่งขันเปลี่ยนใจไปเลือกประตูที่เหลือ โดยสามารถแยกคิดความน่าจะเป็นออกเป็นสามกรณีจากการเลือกครั้งแรกได้ดังนี้

กรณี 2.1: ผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูที่มีแพะตัวที่หนึ่งเป็นครั้งแรก ซึ่งมีความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{1}{3}$ เหตุการณ์จะมีกรณีเดียวดังนี้

ผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูที่มีแพะตัวที่หนึ่ง -> พิธีกรเปิดประตูที่มีแพะตัวที่สอง -> ผู้เข้าแข่งขันเปลี่ยนใจไปเลือกประตูที่มีรถยนต์ทำให้ผู้เข้าแข่งขันเป็นฝ่ายชนะ

กรณี 2.2: ผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูที่มีแพะตัวที่สองเป็นครั้งแรกซึ่งมีความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{1}{3}$ เหตุการณ์จะมีกรณีเดียวดังนี้

ผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูที่มีแพะตัวที่สอง -> พิธีกรเปิดประตูที่มีแพะตัวที่หนึ่ง -> ผู้เข้าแข่งขันเปลี่ยนใจไปเลือกประตูที่มีรถยนต์ทำให้ผู้เข้าแข่งขันเป็นฝ่ายชนะ

กรณี 2.3: ผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูที่มีรถยนต์เป็นครั้งแรก ซึ่งมีความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{1}{3}$ เหตุการณ์ที่เป็นไปได้มีดังนี้

ผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูที่มีรถยนต์ -> พิธีกรเปิดประตูที่มีแพะ -> ผู้เข้าแข่งขันเปลี่ยนใจไปเลือกประตูที่มีแพะอีกประตูที่เหลือทำให้ผู้เข้าแข่งขันเป็นฝ่ายแพ้

ซึ่งอาจพิจารณาเป็นกรณีย่อย 2 กรณีดังนี้

2.3.1 ผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูที่มีรถยนต์ -> พิธีกรเปิดประตูที่มีแพะตัวที่หนึ่ง -> ผู้เข้าแข่งขันเปลี่ยนใจไปเลือกประตูที่มีแพะตัวที่สอง

2.3.2 ผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูที่มีรถยนต์ -> พิธีกรเปิดประตูที่มีแพะตัวที่สอง -> ผู้เข้าแข่งขันเปลี่ยนใจไปเลือกประตูที่มีแพะตัวที่หนึ่ง

เนื่องจากการเลือกเปิดประตูของพิธีกรเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นต่างวาระกับการเลือกประตูครั้งแรกของผู้เข้าแข่งขันและโอกาสที่พิธีกรจะเปิดประตูที่มีแพะตัวที่หนึ่งหรือแพะตัวที่สองมีค่าเท่ากันนั่นคือ $\frac{1}{2}$ ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ย่อยที่ 2.3.1 กับ 2.3.2 จะเป็น $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ เท่ากัน ทำให้ความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูที่มีรถยนต์ครั้งแรกแล้วเปลี่ยนใจจนได้แพะตัวที่หนึ่งหรือตัวที่สองมีค่าเป็น $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ เช่นเดิมซึ่งกรณีย่อยที่ 2.3.1 และ 2.3.2 นี้ เป็นกรณีที่ผู้เข้าแข่งขันเป็นฝ่ายแพ้

เมื่อเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของกรณีที่ 2.1 2.2 และ 2.3 แล้ว จะเห็นว่าหากผู้เข้าแข่งขันตัดสินใจเลือกประตูใหม่เสมอ เหตุการณ์ที่จะชนะมีสองกรณีคือกรณี 2.1 และ 2.2 และเหตุการณ์ที่จะแพ้มีเพียงกรณีเดียวคือกรณี 2.3 ดังนั้น

ความน่าจะเป็นที่จะชนะ = ความน่าเป็นของเหตุการณ์กรณี 2.1 + ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์กรณี 2.2

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ความน่าจะเป็นที่จะแพ้ = ความน่าเป็นของเหตุการณ์กรณี 2.3

$$= \frac{1}{3}$$

นั่นคือการเลือกเปลี่ยนใจจะทำให้ผู้เข้าแข่งขันมีโอกาสชนะเป็นสองเท่าของโอกาสที่จะแพ้ ดังนั้นผู้เล่นจึงควรเลือกเปลี่ยนใจเสมอในการเล่นเกมประตูดวง

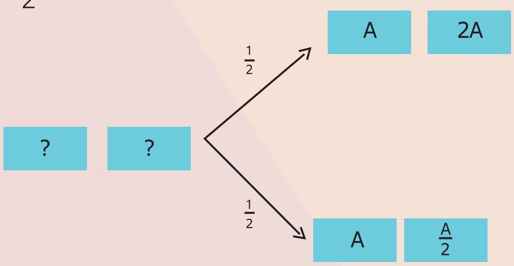
ปฏิทรรศน์มอนตีฮอลล์จากเกมประตูดวงนี้ ผู้สอนสามารถนำไปใช้เป็นกิจกรรมในชั้นเรียนได้จริง ๆ โดยอาจดัดแปลงของรางวัลรถยนต์และแพะเป็นสิ่งของอื่น ๆ และเปลี่ยนจากประตูเป็นภาชนะที่มิดชิด และให้ผู้เรียนสลับกันเป็นฝ่ายผู้เข้าแข่งขันและพิธีกรเพื่อสำรวจว่ากติกาและขั้นตอนต่าง ๆ ของเกมมีผลต่อความน่าจะเป็นอย่างไรบ้าง

3 ปฏิทรรศน์จดหมายสองซอง (Two-Envelope Paradox) กับกิจกรรม ‘สุ่มซองสองเท่า’

สำหรับปฏิทรรศน์จดหมายสองซอง เป็นปฏิทรรศน์เกี่ยวกับค่าคาดหมาย (Expectation) ที่อาจจะแตกต่างจากสองปฏิทรรศน์ที่ได้ยกตัวอย่างไป เนื่องจากปฏิทรรศน์นี้เป็นปฏิทรรศน์ที่แสดงว่าบางครั้งการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่ดำเนินไปอย่างผิดหลักการ ก็อาจนำไปสู่ผลลัพธ์ที่ขัดแย้งกับสามัญสำนึกจนนำไปสู่การตัดสินใจที่ไม่ถูกต้องได้ สำหรับกติกาของกิจกรรม ‘สุ่มซองสองเท่า’ ซึ่งอ้างอิงจากปฏิทรรศน์จดหมายสองซองนี้ มีว่า

มีซองจดหมายที่มีลักษณะเหมือนกันทุกประการอยู่ 2 ซอง และภายในซองทั้งสองนี้มีเงินบรรจุอยู่โดยในซองหนึ่งมีจำนวนเงินเป็นสองเท่าของอีกซองหนึ่งแต่ไม่ทราบว่าเป็นซองไหน ถ้าผู้เล่นสามารถเลือกหยิบซองจดหมายใดก็ได้เพื่อรับเงินในซองไป แต่ได้รับโอกาสให้เปลี่ยนใจเลือกอีกซองหนึ่งก่อนจะเปิดซองอยู่เสมอ ผู้เล่นควรตัดสินใจเปลี่ยนซองหรือไม่เพื่อให้มีโอกาสได้รับเงินที่มากกว่า เพราะเหตุใด

ซึ่งในการตัดสินใจว่าผู้เล่นควรจะเปลี่ยนใจหรือไม่นั้น จะต้องใช้หลักการเรื่องความน่าจะเป็นและค่าคาดหมายมาพิจารณา โดยอาจกำหนดให้ในซองหนึ่งมีจำนวนเงินอยู่ A บาท ความน่าจะเป็นที่อีกซองหนึ่งจะมีจำนวนเงินเป็น 2A และ $\frac{A}{2}$ จะเท่ากับ $\frac{1}{2}$ เท่ากัน ดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 แผนภาพความน่าจะเป็นของกิจกรรม สุ่มซองสองเท่า

ถ้าในครั้งแรกผู้เล่นเลือกซองที่มีเงิน A บาท เราสามารถพิจารณาค่าคาดหมายของจำนวนเงินที่อยู่ในอีกซองหนึ่งเพื่อเปรียบเทียบกันได้ดังนี้

ค่าคาคหมายของจำนวนเงินที่อยู่ในอีกซอง

$$= \frac{1}{2} \times (2A) + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{2}\right) \quad \text{บาท}$$

$$= \frac{5}{4}A \quad \text{บาท}$$

ซึ่งมีค่ามากกว่า A บาท ดังนั้น จึงควรเลือกเปลี่ยนซอง เพราะค่าคาดหมายของจำนวนเงินสูงกว่า

แต่ก่อนจะเปิดซองที่เปลี่ยนใจมาแล้วหนึ่งครั้งผู้เล่นจะได้รับโอกาสในการเปลี่ยนใจอีก ซึ่งหากพิจารณาค่าคาดหมายในลักษณะเดียวกันจะพบว่าการเปลี่ยนใจเพื่อกลับไปเลือกซองเดิมอีกครั้งจะได้ค่าคาดหมายสูงกว่าเดิม จึงควรเลือกเปลี่ยนใจ และจะเลือกเปลี่ยนใจสลับกันเช่นนี้เรื่อยไป โดยไม่สิ้นสุดจนไม่สามารถสรุปได้ว่าควรจะเลือกซองใดดีซึ่งขัดแย้งกับสามัญสำนึกเบื้องต้นว่าเพียงเลือกซองใดซองหนึ่งโดยไม่เปลี่ยนใจ โอกาสที่จะได้เงินจำนวนมากกว่าก็เท่ากับ $\frac{1}{2}$ อยู่แล้ว

ปัญหาจากการคำนวณค่าคาดหมายดังแสดงไว้ข้างต้นอยู่ที่กลลวงของการนำเอาสองกรณีความน่าจะเป็นที่ต่างสถานการณ์กันมาร่วมกันคำนวณเป็นค่าคาดหมายเดียว จากสมการจะสังเกตเห็นได้ว่าจากนิพจน์ (2A) ค่า A เป็นตัวแปรแทนจำนวนเงินที่**น้อยกว่า** ในขณะที่นิพจน์ $(\frac{A}{2})$ ค่า A เป็นตัวแปรแทนจำนวนเงินที่**มากกว่า** ดังนั้นตัวแปร A ที่ใช้ในสมการนี้ใช้แทนค่าสิ่งที่แตกต่างกัน จึงไม่สามารถนำมาคำนวณร่วมกับความน่าจะเป็นเพื่อหาค่าคาดหมายได้

วิธีการคำนวณค่าคาดหมายที่ถูกต้องจะต้องกำหนดตัวแปรใหม่ให้ชัดเจน เช่น กำหนดให้ X แทนจำนวนเงินในซองที่น้อยกว่า ดังนั้นจำนวนเงินที่อยู่ในซองที่มากกว่าจะเป็น 2X บาท เมื่อคำนวณค่าคาดหมายใหม่โดยจะต้องพิจารณาจากค่าคาดหมายของจำนวนเงินที่อยู่ในแต่ละซอง จะได้ว่า

ค่าคาดหมายของจำนวนเงินที่อยู่ในแต่ละซอง

$$= \frac{1}{2}(2X) + \frac{1}{2}(X) \quad \text{บาท}$$

$$= \frac{3}{2}X \quad \text{บาท}$$

ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 2X ซึ่งเป็นจำนวนเงินจริงที่อยู่ในอีกซอง จึงไม่จำเป็นต้องตัดสินใจเปลี่ยนซองจดหมาย

ปฏิทรรศน์จดหมายสองซองนี้แสดงให้เห็นถึงความสำคัญในการแยกกรณีเหตุการณ์ความน่าจะเป็นและการกำหนดตัวแปรที่ชัดเจนในการหาค่าคาดหมาย โดยต้องไม่รวมเอาสถานการณ์ที่เกิดจากการสมมติสองสิ่งที่แตกต่างกันมาคำนวณค่าคาดหมายร่วมกันซึ่งก็เป็นความผิดพลาดที่อาจทำให้คำตอบที่ได้ขัดแย้งกับสามัญสำนึกที่ถูกต้องอยู่แล้วไป กลายเป็นความไขว้เขวที่ชวนให้สงสัยว่าบางครั้งสามัญสำนึกกับคณิตศาสตร์ที่ผิดพลาดก็อาจนำพาเราไปคนละทางได้จริง ๆ!

บรรณานุกรม

Micro-g environtment. (2014). สืบค้นเมื่อ 15 กันยายน 2557 จาก http://en.wikipedia.org/wiki/Microgenvironmen #mediaviewer

Simon, Scott (2005). Math Guy: The Birthday Problem. สืบค้นเมื่อ 7 ตุลาคม 2557,จากhttp://www.npr.org/templates/story/story. php?storyId=4542341

Shermer, Michael (2009). The 3-Door Monty Hall Problem. สืบค้นเมื่อ 7 ตุลาคม 2557, จาก http://www.scientificameri -can.com/article/he-3-door-mon ty-hall-problem

Turner, Rich & Quilter, Tom. The Two Envelopes Problem. สืบค้นเมื่อ 7 ตุลาคม 2557, จาก http://www.gatsby-ucl.ac. uk / - turner / notes / twoenvelopes / 2enulps.dpf

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.(2554). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓.* กรุงเทพ: องค์การค้าของ สกสค.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.(๒๕๕๕). *คู่มือครู รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓.* กรุงเทพ: องค์การค้าของ สกสค.