

ตัวอย่างแนวคิดในการทำข้อสอบการประกวด ผลงานสร้างสรรค์ของคนมีความสามารถทางคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม **The Geometer's Sketchpad** ประจำปี 2556 รอบชิงชนะเลิศ ระดับประถมศึกษา (ตอนที่ 3)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้เปิดรับสมัครนักเรียนเข้าร่วมการประกวดผลงานสร้างสรรค์ของคนมีความสามารถทางคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ประจำปี 2556 เมื่อเดือนกุมภาพันธ์ 2556 หลังจากนั้น สสวท. ได้ส่งข้อสอบให้ผู้สมัครไปสร้างสรรค์ผลงานเป็นเวลา 1 สัปดาห์ แล้วคัดเลือกผู้ผ่านเกณฑ์เข้ามาประกวดรอบชิงชนะเลิศที่ กรุงเทพมหานคร ระหว่างวันที่ 5 – 10 สิงหาคม พ.ศ. 2556 ที่ผ่านการประกวดรอบชิงชนะเลิศระดับประถมศึกษา ข้อสอบแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่ 1 เป็นการสร้างสรรค์ผลงานและตอบคำถามตามที่โจทย์กำหนด และส่วนที่ 2 เป็นการนำเสนอคำตอบและตอบคำถามจากกรรมการ โดยในส่วนที่ 1 จะสอบในช่วงเช้า ใช้เวลา 3 ชั่วโมง คะแนนเต็ม 100 คะแนน ข้อสอบมี 4 ข้อ ข้อละ 25 คะแนน และในส่วนที่ 2 จะสอบในช่วงบ่าย ใช้เวลา 6 นาที คะแนนเต็ม 10 คะแนน ในบทความนี้จะนำเสนอตัวอย่างแนวคิดในการหาคำตอบของโจทย์ที่ใช้ในการประกวดข้อที่ 3 เพื่อให้นักเรียนหรือคุณครูที่สนใจได้ศึกษา ส่วนข้อสอบข้อ 4 เป็นแบบสร้างสรรค์ผลงานของนักเรียนเองจึงไม่ได้นำเสนอแนวคิดไว้

คำชี้แจง

ให้ทำข้อสอบทุกข้อลงในแบบร่างของ Sketchpad โดยในแบบร่าง 1 หน้า ให้ทำข้อสอบเพียง 1 ข้อ แล้วบันทึกงานลงในเครื่อง โดยตั้งชื่อไฟล์เป็นชื่อโรงเรียน เมื่อจะส่งงานให้บันทึกไฟล์งานลงใน handy drive ที่กรรมการจัดไว้ให้โดยบันทึกด้วยตนเอง

ข้อที่ 3 (คะแนนเต็ม 25 คะแนน)

รูปสี่เหลี่ยม “ลูกคิดทอง” คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านที่อยู่ติดกันยาวเท่ากันสองคู่ และมุมที่อยู่ตรงข้ามเท่ากันหนึ่งคู่ ความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสองต่างกัน 4 เซนติเมตรเสมอ และจุดตัดของเส้นทแยงมุมทั้งสองจะแบ่งเส้นทแยงมุมเส้นที่ยาวกว่าออกเป็นสองส่วน โดยส่วนที่ยาวกว่า จะยาวไม่น้อยกว่าสองเท่าของส่วนที่สั้น แต่ยาวไม่เกินสี่เท่าของส่วนที่สั้น

จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมลูกคิดทองเหล่านั้น ที่สามารถปรับขนาดได้พร้อมทั้ง

3.1 หาความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้น

3.2 หาผลหารระหว่างความยาวของส่วนที่ยาวกับความยาวของส่วนที่สั้นของเส้นทแยงมุมเส้นยาวที่ถูกแบ่งนั้น

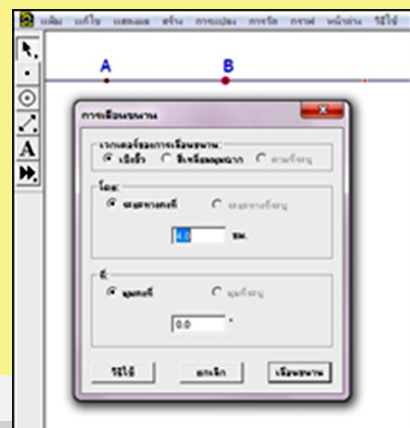
จากเงื่อนไขของโจทย์ที่บอกว่า รูปสี่เหลี่ยมลูกคิดทองเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านที่อยู่ติดกันยาวเท่ากันสองคู่ ทำให้รู้ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่มีสมบัติดังกล่าวมีรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน สี่เหลี่ยมรูปว่าว และสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่มีสมบัติอีกข้อหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมลูกคิดทองที่ว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามเท่ากันหนึ่งคู่ หรือมีเส้นทแยงมุมสองเส้นที่ยาวไม่เท่ากัน ทำให้เหลือรูปสี่เหลี่ยมเพียงชนิดเดียวที่เป็นไปได้ คือ รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว เมื่อเราทราบว่ารูปสี่เหลี่ยมลูกคิดทองเป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวแล้ว เราจึงดำเนินการสร้างรูปสี่เหลี่ยมลูกคิดทองตามเงื่อนไข ดังนี้

1. จากเงื่อนไขที่ว่า ความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นต่างกัน 4 เซนติเมตรเสมอ เราจึงสร้างตัวเลื่อน (slider) ที่เป็นตัวควบคุมความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสองให้เป็นไปตามเงื่อนไขเสมอ ดังนี้

- สร้างเส้นตรงให้อยู่ในแนวนอนหนึ่งเส้น แล้วซ่อนจุดควบคุมเส้นตรง

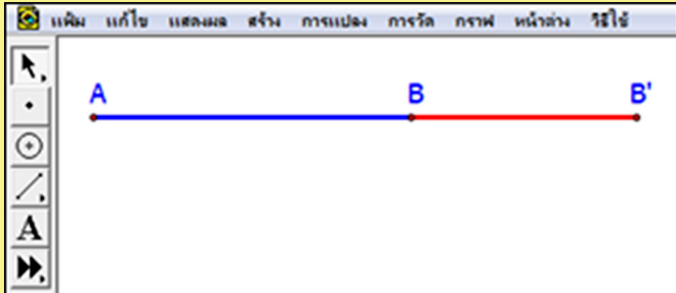
- สร้างจุด A และจุด B บนเส้นตรงที่สร้างไว้

- เลื่อนขนานจุด B ด้วยเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานแบบเชิงขั้ว โดยระยะทางคงที่ 4 ซม. ที่มุมคงที่ 0 องศา เพื่อสร้างแทนส่วนที่เส้นทแยงมุมสองเส้นมีความยาวต่างกัน 4 ซม. ดังรูปที่ 1 จะได้จุด B'



รูปที่ 1

- ช้อนเส้นตรง แล้วสร้างส่วนของเส้นตรง AB' ซึ่งจะใช้ความยาวของส่วนของเส้นตรงนี้แทนความยาวของเส้นทแยงมุมเส้นยาว และสร้างส่วนของเส้นตรง AB ซึ่งจะใช้ความยาวแทนความยาวของเส้นทแยงมุมเส้นสั้น
จะได้ผลดังรูปที่ 2



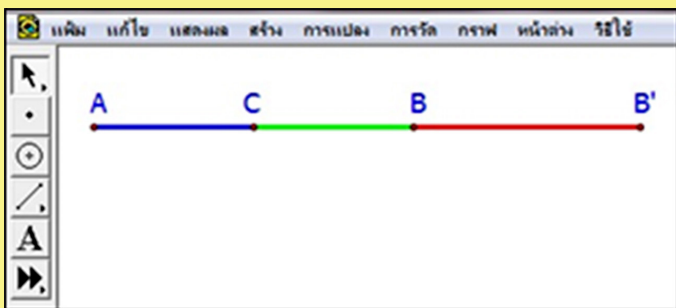
รูปที่ 2

ถึงตอนนี้ได้สร้างส่วนของเส้นตรงที่มีความยาวเท่ากับความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสองซึ่งยาวต่างกัน 4 เซนติเมตรเสมอไม่ว่าความยาวของเส้นทแยงมุมจะเปลี่ยนไปอย่างไรก็ตาม

- เนื่องจากในการสร้างรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าให้ขึ้นไปตามเงื่อนไขของรูปสี่เหลี่ยมลูกคิดดองนั้น จะต้องสร้างให้เส้นทแยงมุมเส้นยาวแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นทแยงมุมเส้นสั้น ดังนั้นจึงต้องแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง AB ซึ่งส่วนของเส้นตรง AB จะยาวเท่ากับความยาวของเส้นทแยงมุมเส้นสั้น เพื่อนำไปใช้ในการสร้างต่อไป ดังนี้

- สร้างจุด C ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB
- สร้างส่วนของเส้นตรง CB ซึ่งมีความยาวเป็นครึ่งหนึ่งของเส้นทแยงมุมเส้นสั้น จะได้ความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสองที่มีความสัมพันธ์กันดังที่กำหนดไว้

จะได้ผลดังรูปที่ 3

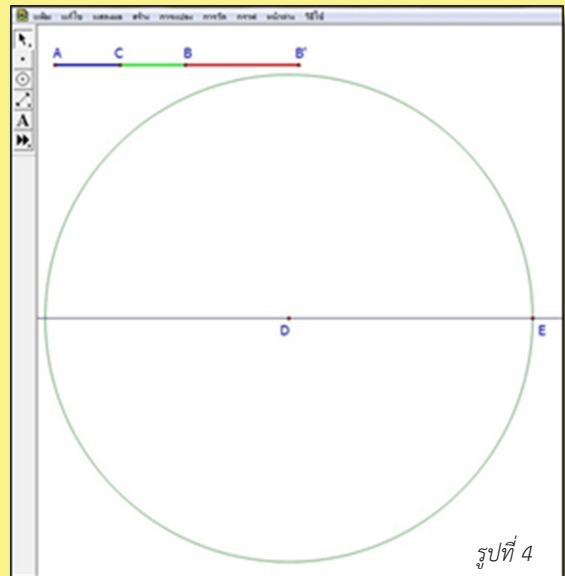


รูปที่ 3

2. การสร้างเส้นทแยงมุมเส้นยาว ทำได้ดังนี้
- สร้างเส้นตรงให้อยู่ในแนวอนหนึ่งเส้น แล้วช้อนจุดควบคุมเส้นตรงนั้น

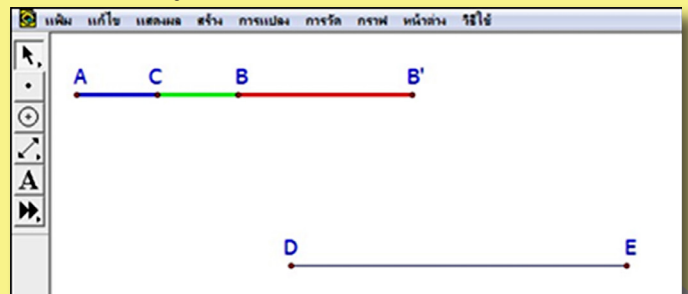
- สร้างจุด D บนเส้นตรงที่สร้างขึ้น
- สร้างวงกลมที่มีจุด D เป็นจุดศูนย์กลาง และมีรัศมียาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง AB' (ซึ่งยาวเท่ากับเส้นทแยงมุมเส้นยาว) โดยเลือกจุด D และส่วนของเส้นตรง AB' จากนั้นไปที่เมนู สร้าง เลือกคำสั่ง วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี

- สร้างจุดตัดระหว่างวงกลม D และเส้นตรง โดยเลือกเฉพาะจุดที่อยู่ทางด้านขวาของจุด D กำหนดชื่อเป็นจุด E
จะได้ผลดังรูปที่ 4



รูปที่ 4

- จากนั้นช้อนวงกลม D และเส้นตรง แล้วสร้างส่วนของเส้นตรง DE ซึ่งจะเป็นเส้นทแยงมุมเส้นยาว ที่สามารถเปลี่ยนความยาวได้โดยการเปลี่ยนความยาวของส่วนของเส้นตรง AB'
จะได้ผลดังรูปที่ 5



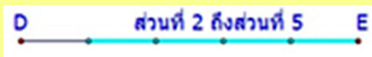
รูปที่ 5

3. การสร้างจุดตัดของเส้นทแยงมุมสองเส้นที่เป็นไปได้ทั้งหมดตามเงื่อนไขของโจทย์ พิจารณาได้ดังนี้

เนื่องจากจุดตัดของเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นจะแบ่งเส้นทแยงมุมเส้นยาวออกเป็นสองส่วน โดยส่วนที่ยาวกว่า จะยาวไม่น้อยกว่าสองเท่าของส่วนที่สั้นกว่า จากเงื่อนไขดังกล่าว ทำให้ทราบว่า จะต้องแบ่งเส้นทแยงมุมเส้นยาวออกเป็น 3 ส่วนที่เท่ากัน แล้วจุดตัดที่เป็นไปได้จะต้องอยู่ในส่วนที่ 1 ดังรูป



นอกจากนี้ยังมีเงื่อนไขอีกว่า ส่วนที่ยาวจะต้องยาวไม่เกินสี่เท่าของส่วนที่สั้น จากเงื่อนไขนี้ทำให้ทราบว่า จะต้องแบ่งเส้นทแยงมุมเส้นยาวออกเป็น 5 ส่วนที่เท่ากัน แล้วจุดตัดที่เป็นไปได้จะต้องอยู่ระหว่างส่วนที่ 2 ถึงส่วนที่ 5 ดังรูป



ดังนั้นตำแหน่งของจุดตัดที่เป็นไปตามเงื่อนไขทั้งสองเงื่อนไขคือส่วนที่สี่ซึ่งมาพร้อมกับส่วนสี่ที่นั่นเอง ซึ่งสร้างได้ดังนี้

- ระบุจุด D เป็นจุดศูนย์กลางของการย่อ/ขยาย แล้วย่อ/ขยายระยะ DE ด้วยอัตราส่วนคงที่ $\frac{1}{3}$ จะได้จุด F

- ระบุจุด D เป็นจุดศูนย์กลางของการย่อ/ขยาย แล้วย่อ/ขยายระยะ DE ด้วยอัตราส่วนคงที่ $\frac{1}{5}$ จะได้จุด G

- สร้างส่วนของเส้นตรง FG ซึ่งเมื่อจุดตัดอยู่บนส่วนของเส้นตรงนี้แล้วจะเป็นไปตามเงื่อนไขที่ว่าจุดตัดของเส้นทแยงมุมทั้งสองจะแบ่งเส้นทแยงมุมเส้นที่ยาวกว่าออกเป็นสองส่วน โดยส่วนที่ยาวกว่า จะยาวไม่น้อยกว่าสองเท่าของส่วนที่สั้น แต่ยาวไม่เกินสี่เท่าของส่วนที่สั้น

- สร้างจุด H บนส่วนของเส้นตรง FG จุดนี้จะให้เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุมทั้งสอง จุด H ที่สร้างขึ้นนี้ สามารถลากไปมาบนส่วนของเส้นตรง FG ได้

จะได้ผลดังรูปที่ 6



รูปที่ 6

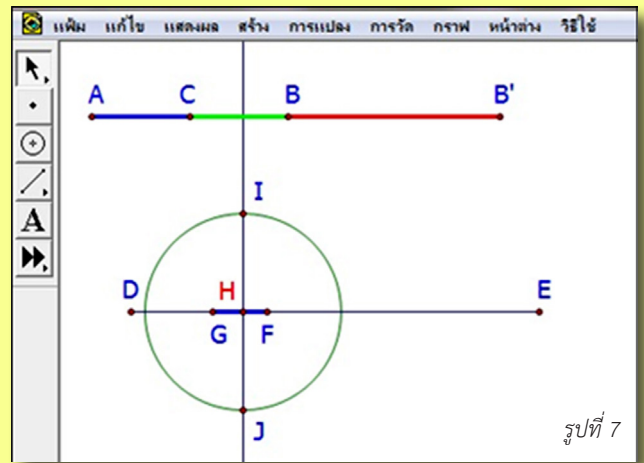
4. การสร้างเส้นทแยงมุมเส้นสั้นให้ตั้งฉากกับเส้นทแยงมุมเส้นยาวที่จุด H ทำได้ดังนี้

- สร้างเส้นตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง FG ที่จุด H

- สร้างวงกลม H ให้รัศมียาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง CB โดยคลิกเลือกจุด H และเลือกส่วนของเส้นตรง CB แล้วไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่ง วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี

- สร้างจุดตัดระหว่างวงกลม H กับเส้นตั้งฉาก กำหนดชื่อเป็นจุด I และจุด J

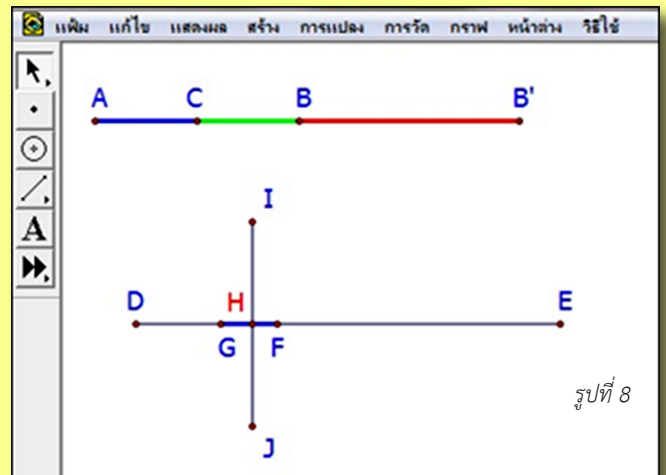
จะได้ผลดังรูปที่ 7



รูปที่ 7

- ช้อนวงกลม H และเส้นตั้งฉาก

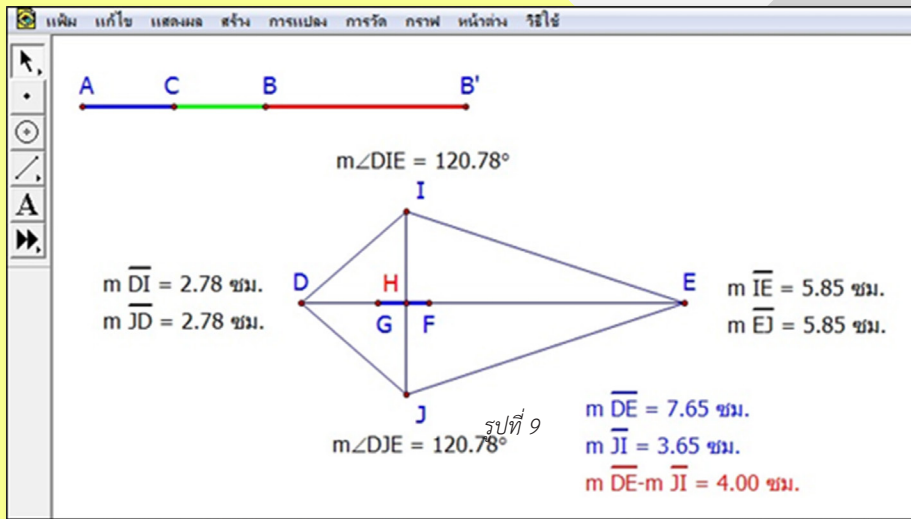
- สร้างส่วนของเส้นตรง IJ ซึ่งเป็นเส้นทแยงมุมเส้นสั้น จะได้ผลดังรูปที่ 8



รูปที่ 8

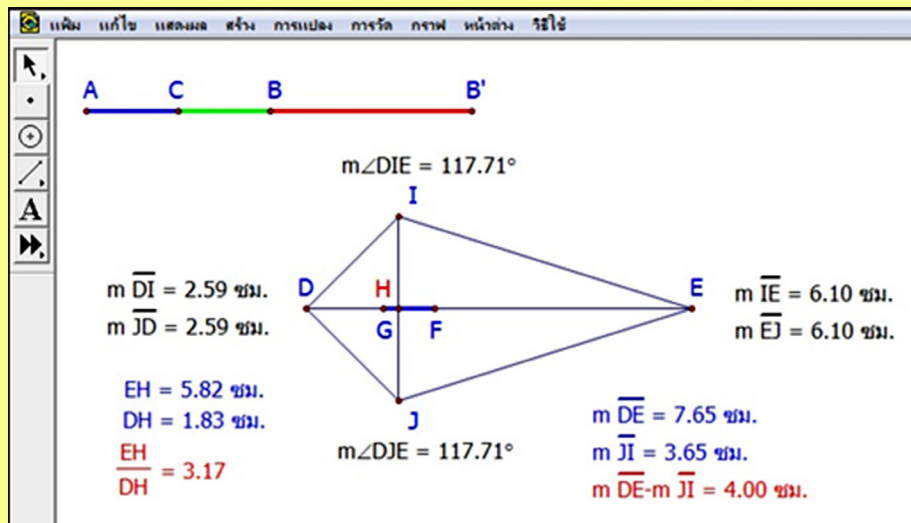
5. สร้าง DI, IE, EJ และ JD จะได้รูปสี่เหลี่ยม DIEJ หลังจากนั้นสำรวจดูว่ารูปสี่เหลี่ยม DIEJ เป็นรูปสี่เหลี่ยมลูกคิดทองหรือไม่ โดยการวัดความยาวด้านทั้งสี่ วัดขนาดของมุมทั้งสี่ และวัดความยาวของเส้นทแยงมุม

จะได้ผลดังรูปที่ 9



รูปที่ 9

6. ตอบคำถามข้อ 3.1 โดยแสดงค่า $m\overline{DE}$ และ $m\overline{JI}$ ที่วัดไว้ตั้งรูปที่ 9 ซึ่งความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสองต่างกัน 4 เซนติเมตร
7. หาผลหารระหว่างความยาวของส่วนที่ยาวกับความยาวของส่วนที่สั้นของเส้นทแยงมุมเส้นยาวที่ถูกแบ่ง โดยวัดความยาวของส่วนของเส้นตรง EH และส่วนของเส้นตรง DH จากนั้นคำนวณหาผลหาร จะได้ผลตั้งรูปที่ 10 และเมื่อลองลากจุด H จะตอบคำถามข้อ 3.2 ได้ว่า ผลหารระหว่างความยาวของส่วนที่ยาวกับความยาวของส่วนที่สั้นของเส้นทแยงมุมเส้นยาวมีค่าตั้งแต่ 2 ถึง 4



รูปที่ 10

แนวคิดที่กล่าวมาข้างต้น เป็นเพียงการแก้ปัญหาวิธีหนึ่ง ยังมีวิธีการแก้ปัญหาวิธีอื่น ๆ ที่มีขั้นตอนการสร้างสั้น ๆ แต่ในที่นี้ได้แสดงวิธีแก้ปัญหาลงละเอียด เพื่อให้เห็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา ตลอดจนให้ผู้อ่านสามารถลองคิดและลองปฏิบัติตามได้

เมื่อนักเรียนหรือคุณครูเห็นแนวคิดในการทำข้อสอบครั้งนี้แล้ว จะเห็นว่าข้อสอบของ สสวท. เป็นข้อสอบที่ให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เรียนมาประกอบกับใช้ความรู้พื้นฐานในการใช้โปรแกรม GSP มาช่วยในการแก้ปัญหา เพียงแต่นักเรียนต้องใช้ความคิด จินตนาการ ตลอดจนมีความเพียรพยายามก็จะสามารถทำงานให้สำเร็จลงได้

บรรณานุกรม
 สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554).
 คู่มืออ้างอิง The geomether's sketchpad ซอฟต์แวร์ สำหรับ
 เชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัต. กรุงเทพฯ: Key Curriculum Press.