

กลยุทธ์แก้ปัญหา

กับการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

โกสุม กรีกอง
นักวิชาการ สาขาคณิตศาสตร์ประถมศึกษา สสวท.
E-mail : kkree@ipst.ac.th

หนึ่งในบรรดาความท้าทายของครูคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาไม่ว่าจะเป็นคุณครูมือใหม่ กลางท่ากลางใหม่ หรือคุณครูรุ่นเก่าหลายต่อหลายท่าน ก็คือ การทำให้นักเรียนมีความคิดรวบยอด และในขณะเดียวกันความคิดนี้ก็สร้างความเชื่อมโยงไปสู่เนื้อหาสาระอื่น ๆ ด้วย การที่คุณครูผู้สอนกลัวว่านักเรียนเรียนไม่เข้าใจ แลมุ่งเน้นการสอนเนื้อหาและขั้นตอนวิธีการเป็นหลักนั้น ทำให้ส่วนของทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์จึงถูกละเลยไป โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ และประโยชน์อดนียบของคุณครูคือ “ไม่รู้ว่าจะเชื่อมโยงอย่างไรและตรงไหน”

ที่จริงแล้ว การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ไม่ใช่เรื่องยาก กลยุทธ์ต่างๆ ที่นักเรียนใช้ในการแก้ปัญหา นอกจากจะช่วยให้คุณครูทราบว่านักเรียนคิดอย่างไรแล้ว ยังสามารถนำมาใช้ช่วยให้นักเรียนสร้างความเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดต่างๆ ทางคณิตศาสตร์อีกด้วย ในที่นี้จะขอแนะนำเสนอตัวอย่างเนื้อหาที่เป็นไม่เบื่อไม่เมากับคุณครูและนักเรียนมาช้านาน นั่นคือ “เศษส่วน” ลองพิจารณาสถานการณ์ปัญหาต่อไปนี้

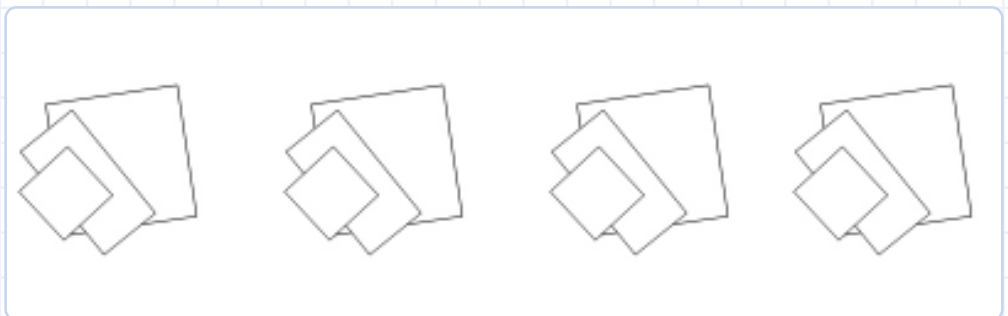
“มีขนมอยู่เจ็ดชิ้น ต้องการแบ่งให้สมาชิกในครอบครัวสี่คน คนละเท่าๆ กัน แต่ละคนจะได้ขนมเท่าใด”

คุณครูท่านหนึ่งได้นำปัญหานี้ไปถามนักเรียนในชั้น ซึ่งคุณครูก็ได้แจกกระดาษจำนวนเจ็ดแผ่นให้นักเรียน เพื่อแทนขนมเจ็ดชิ้น ผลปรากฏว่านักเรียนต่างก็มีแนวคิดแตกต่างกันไปดังนี้

วิธีที่ 1 แจกหนึ่ง แบ่งครึ่งแจก แบ่งสี่แจก

เริ่มจากแจกขนมให้ทั้งสี่คน คนละชิ้น จากนั้นแบ่งครึ่งขนมส่วนที่เหลือหนึ่งชิ้น แจกขนมที่แบ่งครึ่งแล้วให้กับสองคน จากนั้นแบ่งครึ่งขนมส่วนที่เหลืออีกหนึ่งชิ้น แจกขนมที่แบ่งครึ่งแล้วให้กับอีกสองคนที่เหลือ แบ่งขนมที่เหลือออกเป็นสี่ส่วนเท่าๆ กัน แจกให้กับทุกคนคนละชิ้น

ซึ่งนักเรียนที่ใช้วิธีนี้ในการแก้ปัญหา ก็เขียนคำตอบต่าง ๆ กัน บ้างก็เขียนว่าได้คำตอบเป็น $1\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ บ้างก็เขียน “ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ” บ้างก็เขียนคำตอบเป็น “ $1, \frac{3}{4}$ ” บ้างก็เขียน “ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ”



“...นักเรียนหลายคนมักจะคิดว่าเมื่อมี
เครื่องหมาย “เท่ากับ” การดำเนินการของจำนวน
(เช่น บวก ลบ คูณ หาร ฯลฯ) จะต้องอยู่ทาง
ด้านซ้ายมือของเครื่องหมาย “เท่ากับ”
และผลที่ได้จากการดำเนินการของจำนวนจะต้อง
อยู่ทางด้านขวามือของเครื่องหมาย “เท่ากับ” เสมอ
ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ไม่ถูกต้อง...”

เรื่องของ “การหารที่เหลือเศษ” มากกว่า “เศษส่วน”
ใช่หรือไม่ เช่น แบ่งลูกแก้วแก่ลูกให้เด็กสี่คน คนละ
เท่าๆ กัน เด็กแต่ละคนจะได้รับลูกแก้วคนละสองลูก และ
เหลือลูกแก้วหนึ่งลูก และลูกแก้วหนึ่งลูกนี้ ไม่สามารถ
แบ่งออกเป็นสี่ส่วนเท่าๆ กันได้อีก ลองเปลี่ยนจำนวน
ในปัญหาการแบ่งลูกแก้วแก่ลูกให้เด็กสี่คน คนละ
เท่าๆ กัน เป็นการแบ่งลูกแก้วเจ็ดลูกให้เด็กสี่คน
คนละเท่าๆ กัน เด็กแต่ละคนจะได้รับลูกแก้วคนละเท่าใด

ปัญหาดังกล่าว เป็นปัญหาการหารจำนวน
นับซึ่งเขียนประโยคสัญลักษณ์ได้ $7 \div 4$ นักเรียนบาง
คนอาจจะสังเกตได้เองว่า จำนวน “7” และ “4”
ในปัญหาการหาร $7 \div 4$ ก็ปรากฏในปัญหาเศษส่วน
ที่ให้แบ่งขนมเจ็ดชิ้นให้เด็กสี่คน คนละเท่าๆ กัน และ
สามารถสังเกตเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $7 \div 4$ และ

$\frac{7}{4}$ (ซึ่งเป็นคำตอบของปัญหาแบ่งขนมเจ็ดชิ้นให้เด็กสี่คน คนละเท่าๆ กัน)
นักเรียนบางคนจะต้องได้เห็นหลายๆ ตัวอย่างก่อน จึงจะสามารถสังเกตเห็นความสัมพันธ์
ในขณะที่นักเรียนบางคนจะต้องได้รับการชี้แนะแนวทางจากครู จึงสามารถเห็นความสัมพันธ์ระหว่างการ
หารจำนวนนับกับเศษส่วนได้

เศษส่วนที่เท่ากับ

จากปัญหาการแบ่งขนมเจ็ดชิ้นให้เด็กสี่คน คนละเท่าๆ กัน ซึ่งนักเรียนได้คำตอบจากวิธี
คิดต่างๆ กันสามคำตอบ ได้แก่ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $1\frac{3}{4}$ และ $\frac{7}{4}$ ครูเขียนคำตอบทั้งสามบนกระดานดำ และ
อภิปรายร่วมกันในชั้นว่า ทั้งสามคำตอบนั้นเป็นจำนวนที่เท่ากัน นักเรียนอาจจะให้เหตุผลว่า คำตอบ
ที่ได้ทั้งสามคำตอบต่างก็ได้จากความพยายามที่จะแบ่งขนมเจ็ดชิ้นให้แก่เด็กสี่คน คนละเท่าๆ กัน
ดังนั้นคำตอบทั้งสามจึงแสดงจำนวนเดียวกัน ถึงแม้ว่าจะเขียนในรูปแบบต่างกัน ซึ่งในกรณีของคุณครูคนนี้
มีนักเรียนคนหนึ่งตั้งข้อสังเกตว่า “เพียงแค่นี้จำนวนที่ต่างกัน ไม่ได้หมายความว่า เศษส่วนเหล่านั้น เป็น
คนละจำนวน” จากนั้นครูเขียนสรุปบนกระดานดำว่า

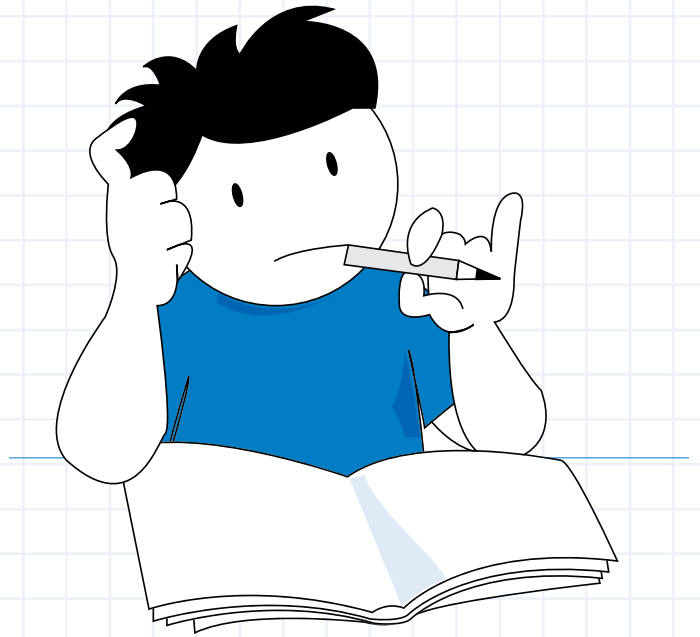
$$1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}, \quad \frac{7}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

ในสถานการณ์นี้ นักเรียนอาจจะได้เห็นเครื่องหมาย “เท่ากับ” ในมุมมองใหม่ นักเรียนหลาย
คนมักจะคิดว่าเมื่อมีเครื่องหมาย “เท่ากับ” การดำเนินการของจำนวน (เช่น บวก ลบ คูณ หาร ฯลฯ)
จะต้องอยู่ทางด้านซ้ายมือของเครื่องหมาย “เท่ากับ” และผลที่ได้จากการดำเนินการของจำนวนจะต้องอยู่
ทางด้านขวามือของเครื่องหมาย “เท่ากับ” เสมอ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ไม่ถูกต้อง การเข้าใจความ
หมายของการเท่ากันและเครื่องหมายเท่ากันนั้นเป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นในการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับ
ที่สูงขึ้น (เช่น พีชคณิต) ซึ่งครูผู้สอนคณิตศาสตร์ในชั้นต้นๆ สามารถปูพื้นฐานความเข้าใจที่ถูกต้องให้
แก่เด็ก โดยการใช้เครื่องหมายเท่ากับเพื่อแสดงการเท่ากัน โดยไม่จำกัดว่าการดำเนินการของจำนวน
จะต้องอยู่ทางด้านซ้ายมือ หรือผลที่ได้จากการดำเนินการของจำนวนจะต้องอยู่ทางด้านขวามือของ
เครื่องหมายเท่ากับ

แม้ว่านักเรียนจะเข้าใจแล้วว่าคำตอบ $1\frac{3}{4}$; $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ และ $\frac{7}{4}$ แทนจำนวนเดียวกัน
ครูจะต้องให้นักเรียนตระหนักได้ว่าเพราะเหตุใดการที่สามจำนวนนี้เท่ากันเป็นเรื่องสำคัญ ตัวอย่างเช่น

เมื่อกล่าวว่ $1\frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ นักเรียนจะต้องบอกได้ว่า $1\frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ การสอนเรื่องการทำเศษส่วนให้มีตัวส่วนเท่ากันยังไม่จำเป็นในตอนนี้นักเรียนสามารถมองเห็นว่า เศษส่วนที่ตัวส่วนไม่เท่ากันนั้นมีค่าเท่ากันได้ โดยอาศัยแผนภาพ ว่าส่วนที่แรเงาแสดง $\frac{3}{4}$ และส่วนที่แรเงาแสดง $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ นั้นครอบคลุมพื้นที่เป็นจำนวนตารางหน่วยเท่ากัน นักเรียนบางคนอาจจะแบ่งครึ่ง $\frac{1}{2}$ ได้เป็นสองส่วนที่เท่ากัน และใช้ความรู้ที่ว่า $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ในการเชื่อมโยงว่า $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

ในทำนองเดียวกัน นักเรียนสามารถรู้ได้ว่า $1\frac{3}{4}$ นั้นเท่ากับ $\frac{7}{4}$ หรืออาจจะใช้ความรู้ที่ว่า $1 = \frac{4}{4}$ เพื่อนำไปสู่ความรู้ใหม่ว่ามี $\frac{1}{4}$ เจ็ดส่วน ใน $1\frac{3}{4}$ แนวคิดของการทำจำนวนคละให้เป็นเศษส่วนยังไม่จำเป็นในขณะนี้ แต่สิ่งที่สำคัญก็คือ นักเรียนจะต้อง



“นักเรียนบางคนจะต้องได้เห็นตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างก่อน จึงจะสามารถสังเกตเห็นความสัมพันธ์ ในขณะที่นักเรียนบางคนจะต้องได้รับการชี้แนะแนวทางจากครู จึงสามารถเห็นความสัมพันธ์ระหว่างการหารจำนวนนับกับเศษส่วนได้”

มีวิธีที่จะบอกได้ว่าเศษส่วนสองจำนวนเท่ากันหรือไม่ ซึ่งครูอาจจะต้องใช้สื่อของจริง เช่น ไข่กระดาษที่ตัดเป็นเศษส่วนต่างๆ ช่วยในการตรวจสอบคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่

แนวคิดที่สัมพันธ์กับเรื่องของเศษส่วนที่เท่ากัน คือ “สัดส่วน/อัตราส่วนที่เท่ากัน” นักเรียนบางคนอาจสังเกตได้ว่าการแบ่งขนมสองชิ้นให้สี่คน คนละเท่าๆ กัน นั้น ไม่ต่างจากการแบ่งขนมหนึ่งชิ้นให้กับสองคน คนละเท่าๆ กัน ทั้งสองกรณีแต่ละคนได้ขนมในปริมาณเท่ากัน นักเรียนบางคนอาจสังเกตเห็น ความสัมพันธ์เชิงผกผันระหว่างจำนวนชิ้นกับขนาดของชิ้นส่วนหลังจากการแบ่ง ตัวอย่างเช่น เมื่อเปรียบเทียบ $\frac{2}{4}$ กับ $\frac{1}{2}$ จะเห็นว่า $\frac{2}{4}$ มีจำนวนชิ้นเป็นสองเท่าของ $\frac{1}{2}$ แต่ขนาดของชิ้นเป็นครึ่งหนึ่งของ $\frac{1}{2}$ ในทางคล้ายกัน เมื่อเปรียบเทียบ $\frac{3}{6}$ กับ $\frac{1}{2}$ จำนวนชิ้นของ $\frac{3}{6}$ นั้นเป็นสามเท่าของ $\frac{1}{2}$ แต่ขนาดของชิ้นเป็นเพียงหนึ่งในสามของ $\frac{1}{2}$

นักเรียนสามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จำนวนนับ เช่น $2 \div 4$, $3 \div 6$ และ $4 \div 8$ และรู้ว่าผลลัพธ์ที่ได้ต่างก็เป็น $\frac{1}{2}$ หรือ

เศษส่วนที่มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ เช่น $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ หรือ $\frac{4}{8}$ นักเรียนบางคนอาจสังเกตเห็นว่า ตัวตั้งมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของตัวหาร บางคนอาจสังเกตเห็นว่าปัญหาคณิตศาสตร์สองปัญหานั้นนำไปสู่ผลลัพธ์เดียวกัน เมื่ออัตราส่วนระหว่างตัวตั้งกับตัวหารของทั้งสองปัญหานั้นเท่ากัน ดังนั้น $3 \div 2$ จึงเท่ากับ $30 \div 20$ และ $300 \div 200$ ซึ่งความรู้ดังกล่าวจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจการหารทศนิยมได้ดียิ่งขึ้น เช่น เพราะเหตุใดจากปัญหา $2.5 \div 0.5$ เราสามารถหาคำตอบได้จากปัญหา $25 \div 5$ ซึ่งให้ผลลัพธ์เท่ากัน

นักเรียนบางคนอาจจะเห็นว่าตัวเศษจะมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของตัวส่วน ในเศษส่วนที่มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ความรู้นี้เป็นพื้นฐานที่จะนำไปสู่แนวคิดที่ว่า เศษส่วนไม่เพียงแต่แสดงปริมาณเท่านั้น เศษส่วนสามารถนำมาใช้แสดงอัตราส่วนหรือสัดส่วน เศษส่วนที่เท่ากันนอกจากจะเป็นปริมาณที่เท่ากันแล้ว ยังเป็นอัตราส่วนหรือสัดส่วนที่เท่ากันอีกด้วย

อีกความเชื่อมโยงที่สำคัญระหว่างเศษส่วนกับปัญหาคณิตศาสตร์ก็คือ ความสัมพันธ์ระหว่างเศษส่วนกับเศษที่ได้จากการหาร และตัวหาร ตัวอย่างเช่น $9 \div 4$ ได้ 2 เศษ 1 หรืออาจจะเขียนคำตอบที่ได้เป็น $2\frac{1}{4}$ สำหรับนักเรียนบางคนที่ยังมองไม่เห็นความสัมพันธ์ดังกล่าว ควรเลือกรับทศนิยมของปัญหาที่ช่วยสร้างความเชื่อมโยง เช่น แบ่งเงิน 9 บาทให้กับเด็กสี่คน คนละเท่าๆ กัน แต่ละคนจะได้รับเงินคนละสองบาทสี่สิบ หรือ $2\frac{1}{4}$

ด้วยบริบทที่เหมาะสม รวมทั้งเครื่องมือและการชี้แนะที่เหมาะสมจากครู นักเรียนก็จะมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเศษส่วนและสามารถเชื่อมโยงเรื่องเศษส่วนไปยังเนื้อหาอื่นๆ ในวิชาคณิตศาสตร์

อย่างไรก็ตาม ครูผู้สอนจะต้องจดจำไว้เสมอว่าไม่มีสูตรสำเร็จที่ตายตัวเกี่ยวกับรูปแบบวิธีการสอน การนำเสนอเนื้อหาให้นักเรียนมีความคิดรวบยอด รวมทั้งสื่อที่ใช้ ครูผู้สอนจะต้องรู้จักยืดหยุ่น ปรับวิธีการสอนและสื่อให้ “เหมาะสม” กับนักเรียนของตนอยู่เสมอ

นี่ล่ะค่ะ ความท้าทายของอาชีพครู 