

การสร้างเครื่องมือกำหนดเองสำหรับ เขียนวงรี (ตอนที่ 2)

ดูเป็นเรื่องง่ายมากทีเดียวที่จะเขียนวงรีให้มีขนาดต่าง ๆ กัน โดยใช้ซอฟต์แวร์ต่าง ๆ เช่น Word และ Power Point แต่คงจะเป็นเรื่องยากทีเดียวถ้าหากให้สร้างวงรีที่มีความยาวของแกนเอกและแกนโทตามที่ต้องการ โดยเฉพาะความยาวที่มีค่าเป็นทศนิยมถึงตำแหน่งที่สองหรือสาม

ISA สามารถสร้างเครื่องมือเขียนวงรีขึ้นใช้เองได้ โดยเพียงแต่บอกความยาวของแกนเอกและแกนโทตามที่ต้องการ ด้วยการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

แต่จะแน่ใจได้อย่างไรว่ารูปวงรีที่สร้างได้นั้นจะเป็นวงรีจริง ๆ ตามบทนิยามทางคณิตศาสตร์ เช่น ถ้ารูปที่สร้างมีแกนอนยาว 6 หน่วย อีกแกนที่ตั้งฉากยาว 4 หน่วย แล้วรูปที่ได้จะเป็นรูปเดียวกันหรือเท่ากันทุกประการกับวงรีที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ หรือไม่

ก่อนที่จะกล่าวถึงรายละเอียดดังกล่าว ลองดูวิธีการสร้างวงรีแบบดังกล่าวก่อน เพื่อเก็บเป็นเครื่องมือกำหนดเองดังต่อไปนี้

สมมุติว่าต้องการสร้างวงรีที่มีแกนเอกยาว $2a$ เซนติเมตร และแกนโทยาว $2b$ เซนติเมตร วงรีดังกล่าวนี้มีความหมายเดียวกันกับต้องการสร้างวงรีที่มีความยาวของครึ่งแกนเอกเป็น a เซนติเมตร และมีความยาวของครึ่งแกนโทเป็น b เซนติเมตร

ในที่นี้จะสร้างวงรีโดยมีแกนหนึ่งอยู่ในแนวนอน และอีกแกนหนึ่งอยู่ในแนวตั้ง โดยการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ดังนี้

1. จากเมนูกราฟ # สร้างพารามิเตอร์ 2 ค่า ค่าที่หนึ่งให้ชื่อว่า $2a$ ในช่องค่า ใส่ 7 หน่วยเป็น ซม. ค่าที่สองให้ชื่อว่า $2b$ ในช่องค่า ใส่ 3 หน่วยเป็น ซม. (ในที่นี้กำหนดให้ค่าที่หนึ่งมากกว่าค่าที่สอง)

จากเมนูการวัด ใช้คำสั่งคำนวณหาค่า $2a/2$ ให้ชื่อค่าใหม่ที่ได้เป็น a และใช้คำสั่งคำนวณหาค่า $2b/2$ ให้ชื่อค่าใหม่ที่ได้เป็น b

2. สร้างจุดอิสระ A แล้วเลื่อนขนานจุด A แบบเชิงซ้ายไป 1 ซม. ด้วยมุมคงที่ศูนย์องศา จะได้จุด A' แล้วสร้างเส้นตรง AA'

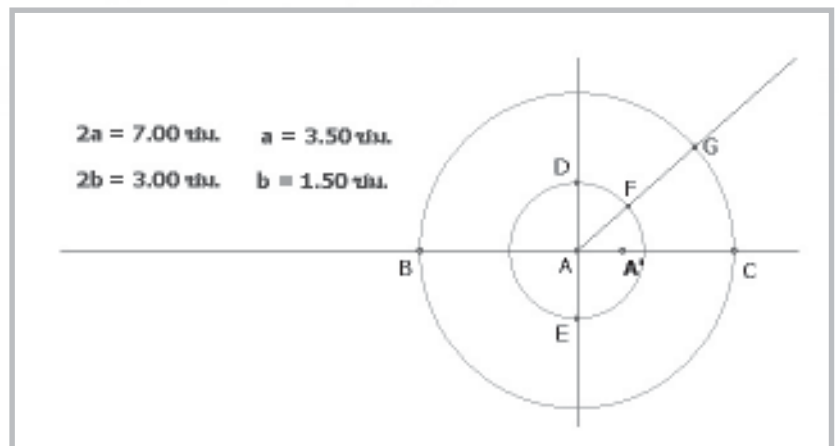
3. สร้างส่วนประกอบของแกนของวงรีดังนี้

- สร้างวงกลม 2 วงที่มีจุด A เป็นจุดศูนย์กลางร่วมกัน และมีรัศมียาว a และ b
- ให้วงกลมวงใหญ่ตัดเส้นตรง AA' ที่

จุด B และ C

● สร้างเส้นตรงตั้งฉากกับเส้นตรง AA' ที่จุด A ให้จุดที่เส้นตรงนี้ตัดกับวงกลมเล็กชื่อจุด D และ E

● สร้างจุดกึ่งอิสระ F บนวงกลมเล็ก ลากรัศมี AF ตัดวงกลมใหญ่ที่จุด G



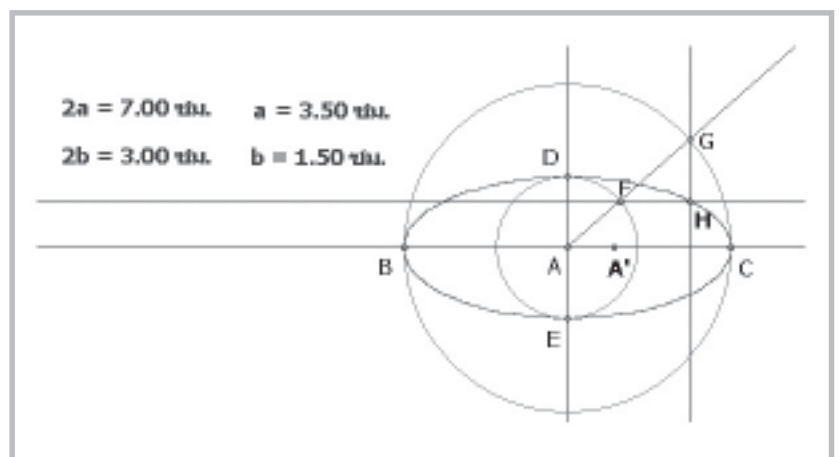
● จะได้ดังรูป

4. สร้างจุดที่อยู่บนวงรี โดย

● สร้างเส้นตรงให้ผ่านจุด G และตั้งฉากกับเส้นตรง AA'

● สร้างเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งให้ผ่านจุด F และขนานกับเส้นตรง AA' ให้จุดที่เส้นตรง 2 เส้นที่สร้างนี้ตัดกันชื่อว่าจุด H

● คลิกเลือกจุด F กับจุด H และจากเมนูสร้าง เลือกคำสั่ง

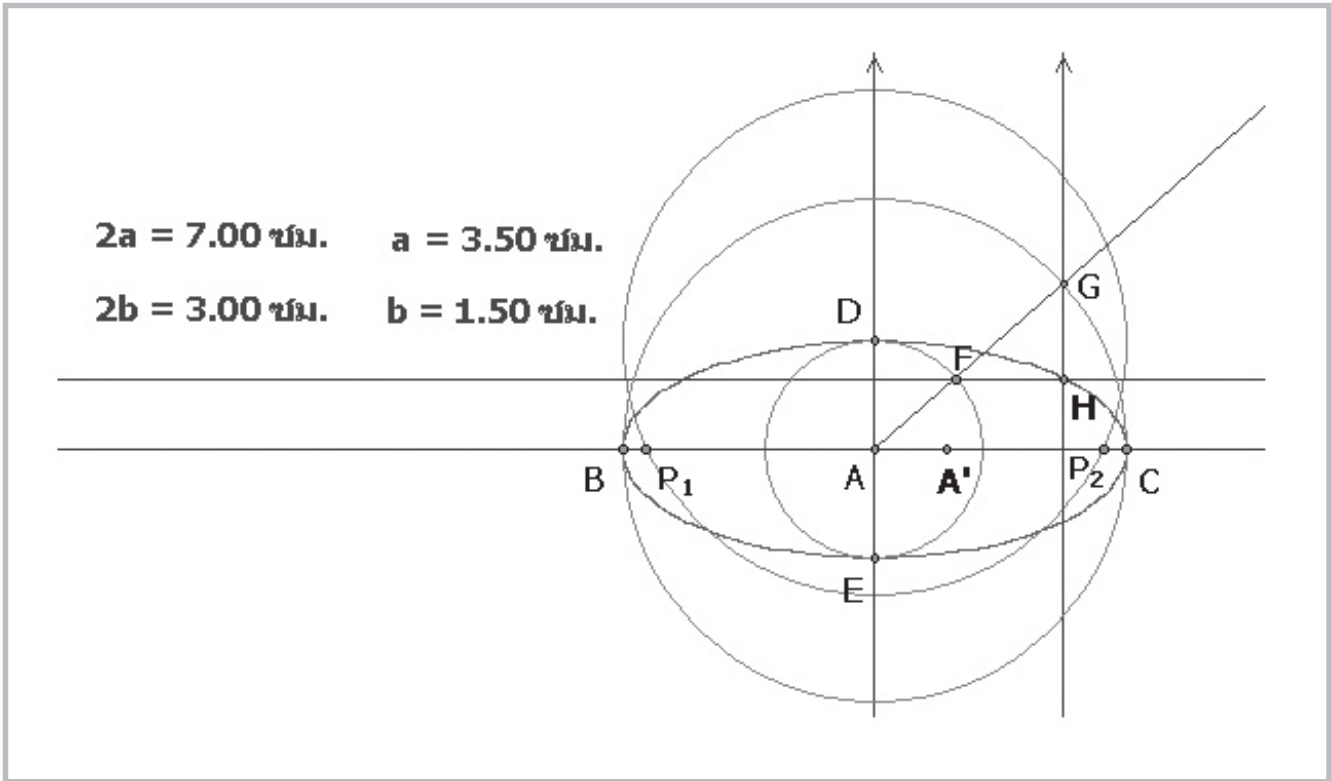


โลคัส จะได้ว่ารอยของกราฟที่เป็นวงรี

5. ถ้าต้องการให้มีไฟกัสปรากฏอยู่บนแกนนอนในกราฟด้วย

ทำได้ดังนี้

● สร้างวงกลมที่มี D เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับ a ให้



จุดที่วงกลมตัดกับเส้นตรง AA' เป็น P₁ และ P₂

จุด P₁ และ P₂ จะเป็นไฟกัสในกรณีนี้ที่แกนเอกอยู่ในแนวนอน
ถ้าต้องการให้มีไฟกัสปรากฏอยู่บนแกนตั้งในกราฟด้วย ในกรณีนี้แกนตั้งยาวกว่าแกนนอน ทำได้ดังนี้

● ปรับค่าพารามิเตอร์ 2b ให้มีค่ามากกว่า 2a จะเห็นว่า

AB < AD

● คลิกเลือกพารามิเตอร์ b และจุด B ใช้คำสั่งสร้างวงกลม

จากเมนูสร้าง ให้จุดที่วงกลมตัดกับเส้นตรง AD ชื่อจุด P₃ และ P₄

จุด P₃ และ P₄ จะเป็นไฟกัสในกรณีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

เมื่อสร้างไฟกัสเสร็จแล้ว คลิกเลือกจุด P₃ และ P₄ หลังจาก

นั้นให้ปรับค่าพารามิเตอร์เสียใหม่โดยทำให้ 2a > 2b เพื่อเตรียมสร้างเครื่องมือกำหนดเองต่อไป

การสร้างเครื่องมือกำหนดเอง

เราจะเก็บรูปร่างที่สร้างไว้เป็นเครื่องมือกำหนดเองสำหรับใช้สร้างวงรีที่กำหนดความยาวของแกนเอกและแกนโทให้ได้ดังนี้

● คลิกเลือกพารามิเตอร์ 2a (ความยาวแกนในแนวนอน)

● คลิกเลือกพารามิเตอร์ 2b (ความยาวแกนในแนวตั้ง)

● คลิกเลือกจุด A ซึ่งจะเป็นจุดศูนย์กลางของวงรี (โดยไม่ให้ชื่อจุดปรากฏ)

● คลิกเลือกวงรี

ในกรณีที่ต้องการให้จุดปลายแกนเอกและแกนโทปรากฏด้วย

เมื่อเขียนวงรี ให้คลิกเลือกจุด B, C, D, E (โดยไม่ให้ชื่อจุดปรากฏ)

ถ้าต้องการให้ไฟกัสปรากฏด้วยในขณะที่เขียนวงรี ให้คลิกเลือกไฟกัสด้วย (ต้องไม่ให้ชื่อจุดปรากฏ)

● จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง เลือกคำสั่ง สร้างเครื่องมือใหม่ จะปรากฏกล่องโต้ตอบ เครื่องมือใหม่ กำหนดชื่อเครื่องมือเป็นวงรีเมื่อมีความยาวแกน

● คลิกเลือกตกลง ก็จะได้เครื่องมือสร้างวงรี

การเรียกใช้เครื่องมือกำหนดเองเพื่อสร้างวงรี

● ก่อนจะใช้เครื่องมือต้องมีเงื่อนไขสำหรับเครื่องมือนี้ก่อนคือมี พารามิเตอร์ 2 ค่าที่แสดงความยาวของแกนในแนวนอนและในแนวตั้ง โดยมีหน่วยเป็น ซม. แล้วจึงดำเนินการตามลำดับดังนี้

● จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง เลือกคำสั่ง **วงรีเมื่อมีความยาวแกน**

● คลิกเลือกพารามิเตอร์ตัวที่ 1 ที่จะให้เป็นความยาวของแกนในแนวนอน

● คลิกเลือกพารามิเตอร์ตัวที่ 2 ที่จะให้เป็นความยาวของแกนในแนวตั้ง

● จะปรากฏรูปร่างวงรีออกมา โดยมีจุดศูนย์กลางของวงรีปรากฏด้วย

● ถ้าเครื่องมือที่สร้างเก็บไว้แล้วได้ระบุจุดปลายของแกนทั้งสองและไฟกัสด้วย รูปร่างที่ปรากฏก็จะมีสิ่งเหล่านั้นปรากฏด้วย

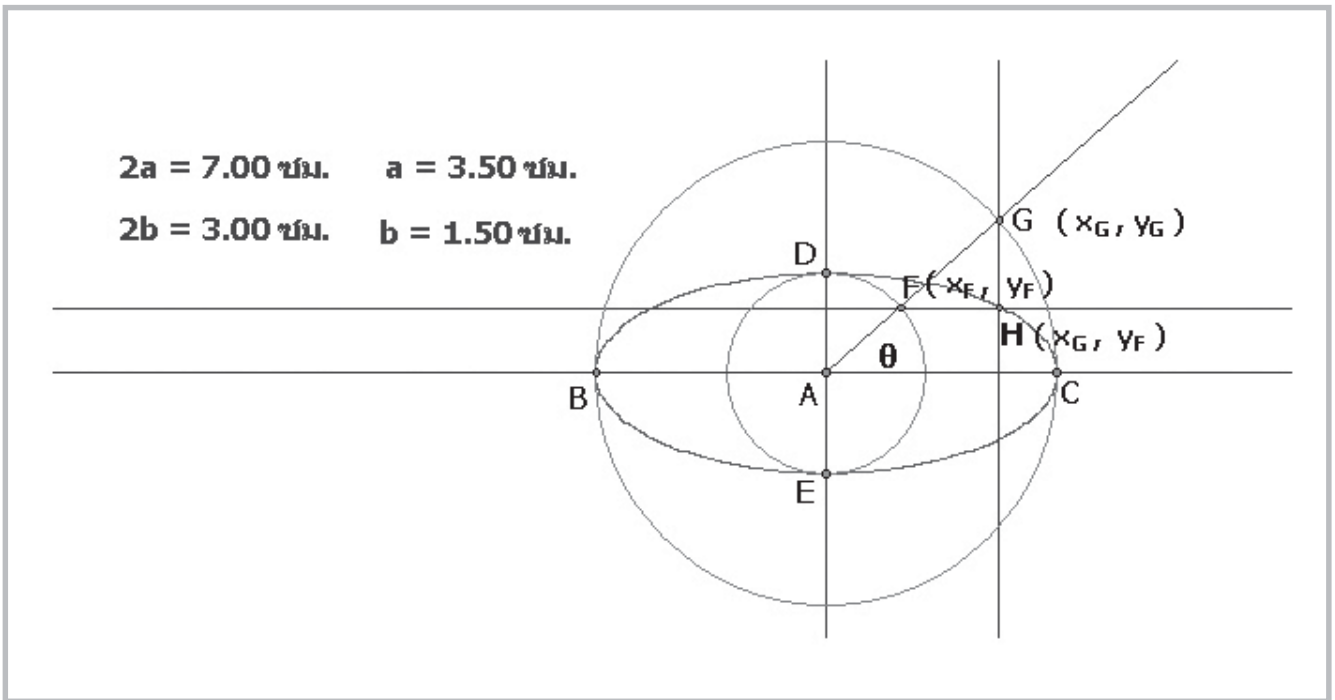
สิ่งที่ควรทดลอง

ถ้าจะสร้างเครื่องมือที่ใช้สร้างวงรี เมื่อกำหนดความยาวของครึ่งแกนนอนและแกนตั้งให้ โดยเริ่มต้นกำหนดพารามิเตอร์ 2 ค่า ที่แทนความยาวครึ่งแกนเป็น a และ b เซนติเมตร เครื่องมือที่สร้างด้วยวิธีนี้ เงื่อนไขที่กำหนดให้อาจจะเป็นค่าพารามิเตอร์ 2 ค่าที่มีหน่วยเป็น ซม. หรือกำหนดเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง 2 เส้น ที่ความยาวนั้นจะเป็นความยาวครึ่งแกนของวงรี ก็จะได้รูปวงรีเช่นกัน

แล้วจะเชื่อได้อย่างไรว่า รูปที่ได้เป็นวงรีจริง

เราทราบมาแล้วว่า วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ และมีความยาวของแกนในแนวนอนเป็น $2a$ และแนวตั้งเป็น $2b$ นั้น จะมีความสมการเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ถ้านำรูปที่เราสร้างมาวางในระบบแกนมุมฉากโดยให้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ แกนในแนวนอนอยู่ในแนวแกน X และแกนในแนวตั้งอยู่ในแนวแกน Y แล้วเราจะเชื่อได้อย่างไรว่า จุดบนรูปวงรีทุกจุดที่เราสร้างจะสอดคล้องกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ นั้น



2a = 7.00 ซม. a = 3.50 ซม.
2b = 3.00 ซม. b = 1.50 ซม.

จากรูป
 ถ้าให้พิกัดของจุด F เป็น (x_F, y_F)
 และพิกัดของจุด G เป็น (x_G, y_G)
 ดังนั้น พิกัดของจุด H ซึ่งเป็นจุดบนวงรีของเราจะมีพิกัด

(x_G, y_F)
 และถ้าพิกัดของจุด H สอดคล้องกับสมการของวงรีจริง
 ก็จะต้องแสดงให้เห็นได้ว่า $\frac{x_G^2}{a^2} + \frac{y_F^2}{b^2} = 1$ ซึ่งทำได้ดังนี้

ให้ θ เป็นขนาดของมุม GAC
 เนื่องจาก $AF = b$ (รัศมีของวงกลมเล็ก)

จะได้ $\frac{y_F}{2} = \sin \theta$

ดังนั้น $(\frac{y_F}{2})^2 = \sin^2 \theta$

และเนื่องจาก $AG = a$ (รัศมีของวงกลมใหญ่)

จะได้ $\frac{x_G}{3} = \cos \theta$

ดังนั้น $(\frac{x_G}{3})^2 = \cos^2 \theta$

นั่นคือ $\frac{(x_G)^2}{3^2} + \frac{(y_F)^2}{2^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

จะเห็นว่าพิกัด (x_G, y_F) สอดคล้องกับสมการ $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

จริง

ทำให้เรามั่นใจได้ว่า รูปที่สร้างได้นั้นเป็นวงรีจริง

ในการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สร้างกราฟและรูปต่างๆ นั้น หากต้องการให้เกิดประโยชน์สูงสุด ผู้ใช้ควรหาเหตุผลว่ากราฟหรือภาพที่ได้นั้นเป็นจริงอย่างไร เพราะรูปทุกรูปที่สร้างด้วยโปรแกรมนี้นี้สร้างจากหลักเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น