

ศิลปะ จากการบวกและการคูณ บนหน้าปัดนาฬิกา

คณิตศาสตร์ในแง่มุมหนึ่งเป็นการศึกษาเรื่องแบบรูป มีแบบรูปของจำนวนอยู่หลายประเภท ที่สามารถนำมาสร้างสรรผลงานศิลปะได้ ในที่นี้จะขอเสนองานศิลปะที่สร้างสรรขึ้นจากการบวกและการคูณแบบพิเศษที่ดำเนินการบนหน้าปัดนาฬิกาแทนการใช้เส้นจำนวน หน้าปัดนาฬิกาประกอบด้วยตัวเลขที่แสดงจำนวนนับ 1 ถึง 11 และขอใช้ 0 แทน 12 โดยให้ 0 เป็นจุดเริ่มต้น

การดำเนินการด้วยการบวกและการคูณบนหน้าปัดนาฬิกา คิดเป็นจำนวนเต็มชั่วโมง การบวกเป็นการนับต่อไปจากจำนวนแรกเมื่อถึง 0 แล้วเริ่มนับ 1 ใหม่ เช่น



$7 + 3$ ได้ 10 เพราะเป็นการนับต่อจาก 7 นาฬิกา ไปอีก 3 ชั่วโมง ได้เวลาตรงกับ 10 นาฬิกา
 $10 + 2$ ได้ 0 เพราะเป็นการนับต่อจาก 10 นาฬิกา ไปอีก 2 ชั่วโมง ได้เวลาตรงกับจุดเริ่มต้นที่ 0 นาฬิกา
 $10 + 5$ ได้ 3 เพราะเป็นการนับต่อจาก 10 นาฬิกา ไปอีก 5 ชั่วโมง ได้เวลาตรงกับ 3 นาฬิกา (เวลาปกติคือ 15 นาฬิกา)

ในการหาผลบวก เราอาจใช้การบวกตามปกติ แล้วนำผลบวกมาหารด้วย 12 เหลือเศษเท่าไร ก็เป็นคำตอบ เช่น $11 + 3$ ได้ 2 เพราะ $11 + 3 = 14$ และ $14 \div 12$ ได้ 1 เศษ 2 ทางคณิตศาสตร์เรียกการบวกแบบนี้ว่า **การบวกในมอดุโล 12** (modulo 12 หรือเขียนสั้นๆ ว่า mod 12) เราสามารถสร้างตารางการบวกของ 0, 1, 2, 3, ..., 11 ใน **มอดุโล 12** ได้ดังนี้

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

จากตารางการบวก จะเห็นว่า ถ้าลากส่วนของเส้นตรงตามแนวทแยงมุมจากมุมบนซ้ายมือไปยังมุมล่างขวามือ จะได้ว่าตัวเลขทั้งสองข้างของเส้นเหมือนกัน กล่าวคือ การบวกในมอดุโล 12 มี**สมบัติการสลับที่**

$0 + a = a$ สำหรับ ทุก ๆ a ที่ เป็น 0, 1, 2, 3, ..., 11 เราเรียก 0 ว่า **เอกลักษณ์ของการบวก**

สำหรับจำนวน a และ b ใด ๆ ที่ $a + b = 0$ เรียก a ว่าเป็น **จำนวนตรงข้ามของ b** เช่น 2 เป็นจำนวนตรงข้ามของ 10 เพราะว่า $2 + 10 = 0$ ในมอดุโล 12

จากตารางการบวก ให้หาจำนวนตรงข้ามของ 0, 1, 2, 3, ..., 11

สำหรับการคูณบนหน้าปัดนาฬิกาทำได้โดยอาศัยแนวคิดทำนองเดียวกันกับการบวก เช่น 2×8 ได้ 4 เพราะเป็นการนับต่อจาก 8 นาฬิกาไปอีก 8 ชั่วโมง คือนับ 8 ต่อกัน 2 ครั้ง ได้เวลาตรงกับ 4 นาฬิกา หรือ อาจคิดจากการหาผลคูณตามปกติ แล้วนำผลคูณมาหารด้วย 12 เหลือเศษเท่าไร ก็เป็นคำตอบ เช่น 2×8 ได้ 4 เพราะว่า $2 \times 8 = 16$ และ $16 \div 12$ ได้ 1 เศษ 4 ทางคณิตศาสตร์เรียกการคูณแบบนี้ว่า **การคูณในมอดุโล 12** ตารางการคูณของ 0, 1, 2, 3, ..., 11 ใน มอดุโล 12 แสดงได้ดังนี้

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

จากตารางการคูณ จะเห็นว่า ถ้าลากส่วนของเส้นตรงตามแนวทแยงมุมจากมุมบนซ้ายมือไปยังมุมล่างขวามือ จะได้ว่าตัวเลขทั้งสองข้างของเส้นเหมือนกัน กล่าวคือ การคูณในมอดุโล 12 มี**สมบัติการสลับที่** เช่นกัน

$1 \times a = a$ สำหรับ ทุก ๆ a ที่ เป็น 0, 1, 2, 3, ..., 11 เราเรียก 1 ว่า **เอกลักษณ์ของการคูณ** สำหรับจำนวน a และ d ใดๆ ที่ ไม่เป็น 0 และ $a \times d = 1$ เรียก a ว่าเป็น **จำนวนที่เป็นส่วนกลับของ a** จากตารางการคูณใน มอดุโล 12 ข้างต้น มีจำนวนใดบ้างที่มีส่วนกลับ

เมื่อสังเกตผลคูณในแต่ละแถว มีแบบรูปของจำนวนที่น่าสนใจหลายประการ เช่น

- 1. ผลคูณในแถวที่ได้จากการคูณด้วย 2 มีผลคูณ 6 จำนวน คือ 0, 2, 4, 6, 8 และ 10
- 2. ผลคูณในแถวที่ได้จากการคูณด้วย 3 มีผลคูณ 4 จำนวน คือ 0, 3, 6 และ 9
- 3. ผลคูณในแถวที่ได้จากการคูณด้วย 4 มีผลคูณ 3 จำนวน คือ 0, 4 และ 8
- 4. ผลคูณในแถวที่ได้จากการคูณด้วย 5, 7 และ 11 มีผลคูณครบทั้ง 12 จำนวน ได้แก่ 0, 1, 2, 3, ..., 11 และโปรดสังเกตว่า 5, 7 และ 11 ต่างก็เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 12 กล่าวคือ มี 1 เพียงจำนวนเดียวที่เป็นตัวหารร่วมของ 5 กับ 12 7 กับ 12 และ 11 กับ 12

ต่อไปเรามาชูช่วยกันสร้างงานศิลปะจากการบวกและการคูณบนหน้าปัดนาฬิกา

งานศิลปะชิ้นที่ 1 : ผลงานจากตารางการบวกและการคูณในมอดุโล 12

การปรากฏของตัวเลขที่เป็นผลบวกในตารางการบวกข้างต้นมีแบบรูปสวยงาม เพื่อให้ความงามที่ซ่อนอยู่นั้นปรากฏชัดเจนขึ้นมา ให้กำหนดสี 12 สี แทนตัวเลข 0, 1, 2, ..., 11 โดยไม่ซ้ำกัน แล้วระบายสีในช่องตารางให้ตรงกับตัวเลขที่เป็นผลบวก

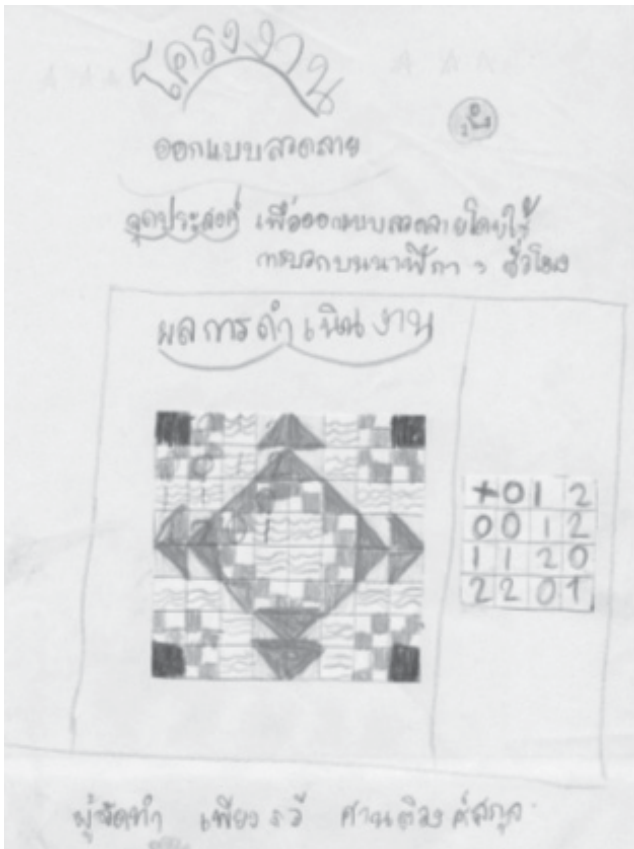
สำหรับผลคูณในตารางการคูณก็สามารถนำมาสร้างผลงานทางศิลปะได้เช่นเดียวกัน โดยอาจนำเฉพาะส่วนที่เป็นผลคูณของ 1, 2, 3, ..., 11 มาตัดส่วนที่เป็นผลคูณของ 0 ออกไปก็ได้

ถ้าความงามของผลบวกและผลคูณที่ได้ยังไม่จุใจ ในแต่ละตารางอาจใช้การแปลงทางเรขาคณิต เช่น การสะท้อนภาพตามแนวตั้ง แล้วตามด้วยการสะท้อนภาพทั้งหมดที่ได้อีกครั้งตามแนวนอน จะได้เป็นภาพงดงามที่มีโครงสร้างเป็นภาพสี่ภาพต่อกัน น่าจะลองทำดู

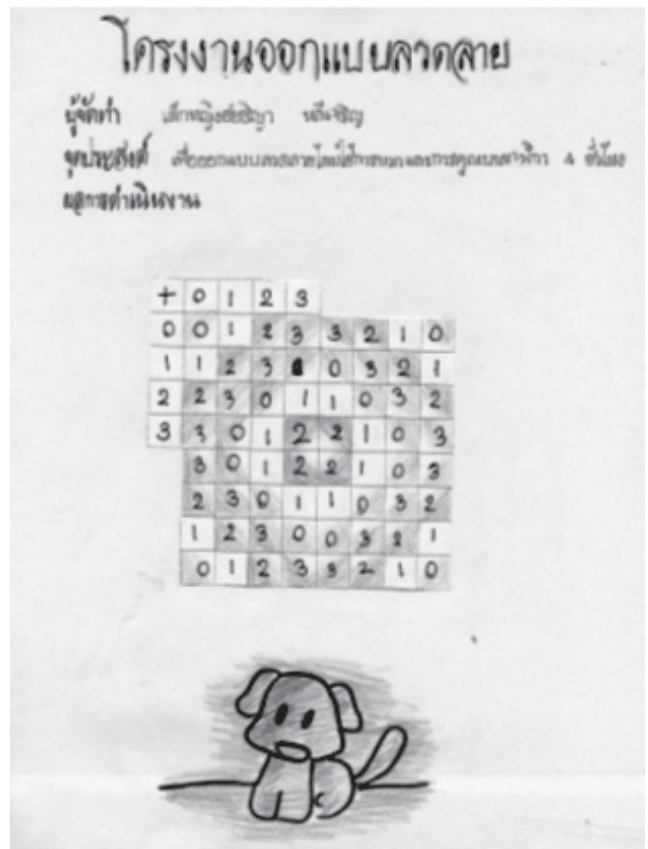
งานศิลปะชิ้นที่ 2 : ผลงานจากการบวกในมอดุโลต่าง ๆ

ถ้าเรากำหนดตัวเลขบนหน้าปัดนาฬิกาใหม่ เช่น กำหนดให้เป็นนาฬิกา 3 ชั่วโมง ซึ่งประกอบด้วยตัวเลข 0, 1, 2 และใช้สำหรับหาผลบวกในมอดุโล 3 กำหนดสีและลวดลายแทนตัวเลข แล้วนำลวดลายมาเขียนแทนตัวเลขที่เป็นผลบวกในตาราง ใช้การแปลงทางเรขาคณิต ได้แก่ การสะท้อน และการหมุนรูปเดิมแล้วนำมาวางต่อกัน จะได้งานศิลปะที่งดงามทีเดียว ต่อไปนี้เป็นส่วนหนึ่งของผลงานในลักษณะโครงการน้อย (mini project) ของนักเรียนค่ายเหรียญทองโครงการพัฒนาอัจฉริยภาพทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ สสวท. เมื่อเดือนตุลาคม พ.ศ. 2549

ลวดลายที่เป็นผลงานการออกแบบของนักเรียนตัวน้อย ๆ อาจเป็นการเริ่มต้นอย่างมีพลังที่ทำให้เกิดเป็นชิ้นงานที่ยิ่งใหญ่ต่อไปในภายหน้าก็ได้



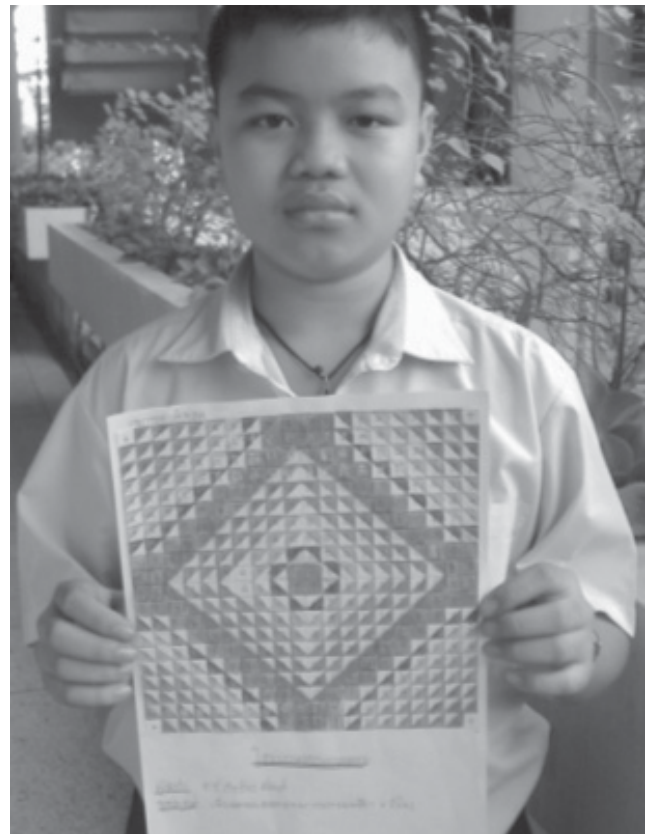
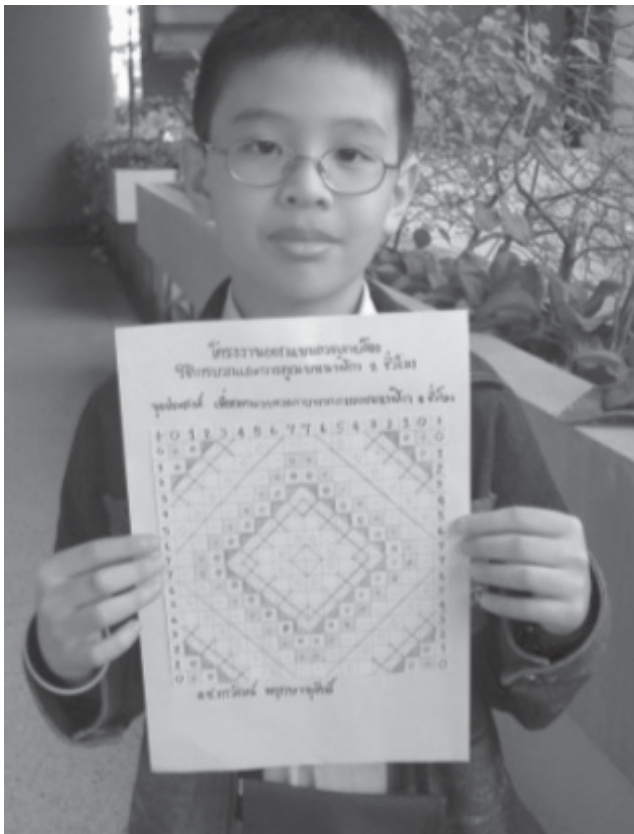
ศิลปะจากการบวกในมอดุโล 3 ของเพ็ญจวิ



ศิลปะจากการบวกในมอดุโล 4 ของชชื่น

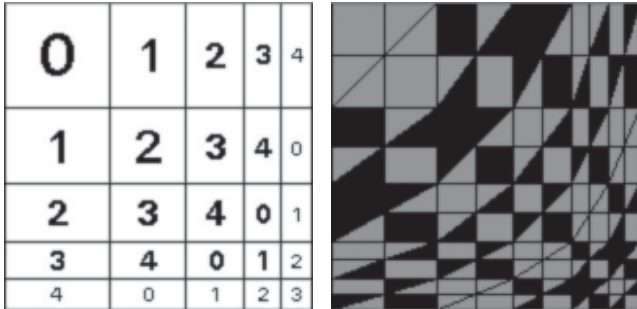
ศิลปะจากการบวกในมอดุโล 8 ของกรวิณน

ศิลปะจากการบวกในมอดุโล 9 ของกัทิทยะ



งานศิลปะชิ้นที่ 3 : ความงามบนความเปลี่ยนแปลง

ลองสร้างตารางการบวกในมอดุโล 5 พิจารณาส່วนที่เป็นผลบวกของตารางการบวกในมอดุโล 5 ตามแนวนอน ถ้าเราลดขนาดของความกว้างของช่องตารางที่อยู่ถัดไปทางขวามือให้เหลือเพียง 70 % ของความกว้างของช่องตารางทางซ้ายมือ เช่นนี้ต่อๆ ไป ในแนวดิ่งก็ทำเช่นเดียวกัน คือลดขนาดของความสูงของช่องตารางที่อยู่ถัดลงไปให้เหลือเพียง 70 % ของความสูงของช่องตารางที่อยู่ข้างบน แล้วระบายสีเติมลวดลายแทนตัวเลข



ก็จะได้รับความงามที่แปลกตาในอีกลักษณะหนึ่ง ซึ่งเมื่อนำมาสร้างรูปใหม่โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิต อันได้แก่ การสะท้อนและการหมุนรูปเดิมแล้วนำมาวางต่อกันก็จะได้แบบสำหรับผ้าทอผืนใหม่ที่ไมเหมือนใคร

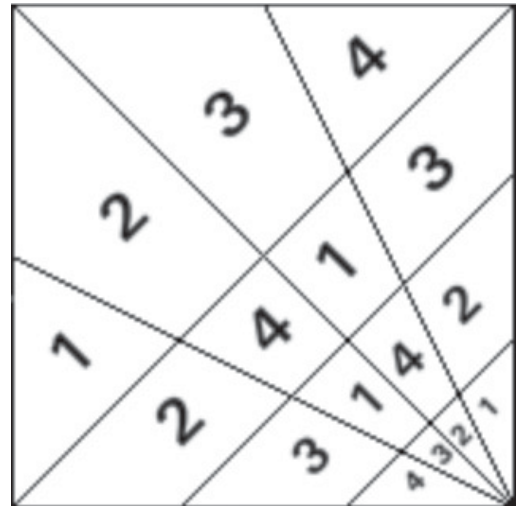
งานศิลปะชิ้นที่ 4 : งานสร้างสรรคจากการคูณในมอดุโล 5

การคูณในมอดุโล 5 สามารถนำมาใช้เป็นต้นแบบออกแบบลวดลายได้เช่นกัน

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1



ลองนำเฉพาะส่วนที่เป็นผลคูณของ 1, 2, 3, 4 มากำหนดสีและลวดลายดังตัวอย่างข้างต้น เปลี่ยนแปลงลักษณะของตารางส่วนที่เป็นผลคูณใหม่ ให้มีจุดรวมสายตาที่มุมล่างขวามือ แล้วระบายสีและเขียนลวดลายตามลักษณะของช่องตารางที่เปลี่ยนไป



ต่อเติมสร้างรูปใหม่โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิต ได้แก่ การสะท้อน และการหมุนรูปเดิมแล้วนำมาวางต่อกัน จะได้แบบสำหรับพรมสุดหรูผืนใหม่ที่มีลวดลายอีกแบบหนึ่ง ลองทำดู

จึงเห็นได้ว่าเราสามารถนำคณิตศาสตร์มาใช้สร้างสรรค์ความงามได้มากมาย และเมื่อสร้างสรรค์ได้อย่างหนึ่งก็จะจุดประกายให้คิดสร้างสรรค์อีกอย่างได้ต่อไปไม่รู้จบ ลองใช้การบวกและการคูณในมอดุโลที่คุณชอบ มาสร้างสรรค์งานศิลปะที่อาจจะเป็นหนึ่งในโลกตีใหม่