

# สร้างไฮเพอร์โบลา ตามวิธีการทางเรขาคณิตด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

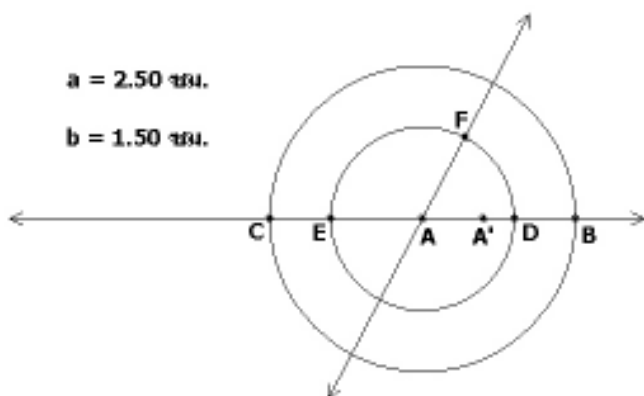
คงจะดีไม่น้อย ถ้าครูผู้สอนจะมีเครื่องมือของตนเองไว้เขียนไฮเพอร์โบลาที่มีความยาวแกนตามขวาง (transverse axis) และแกนสังยุค (conjugate axis) ตามต้องการ ตลอดจนสามารถเลือกวางจุดศูนย์กลางของกราฟ ณ ตำแหน่งใดก็ได้ โดยไม่ต้องไปหาสมการของไฮเพอร์โบลานั้นก่อน

**ไฮ**เพอร์โบลาเป็นกราฟที่สำคัญกราฟหนึ่งของภาคตัดกรวย เราสามารถสร้างเครื่องมือเขียนกราฟดังกล่าวได้โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad แล้วเก็บเป็นเครื่องมือกำหนดเองเพื่อไว้ใช้งานต่อไป

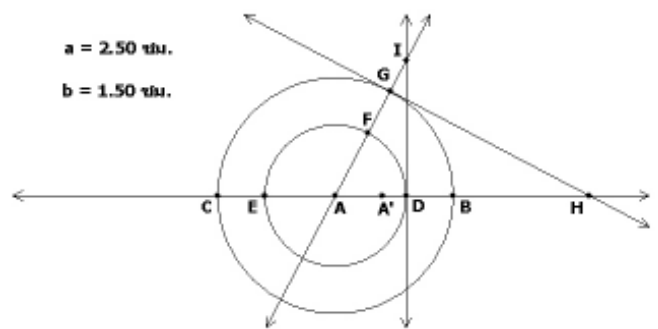
## การสร้างกราฟ

ถ้าต้องการสร้างไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางยาว 5 เซนติเมตร และแกนสังยุคยาว 3 เซนติเมตร โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ให้ทำตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้ (ในที่นี้จะสร้างไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน)

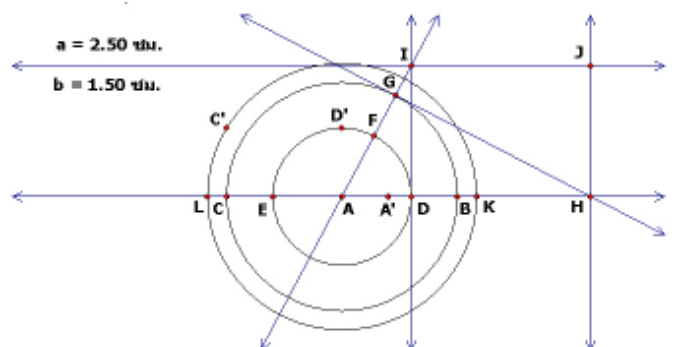
1. สร้างพารามิเตอร์ชื่อ  $a$  กำหนดค่าเป็น 2.5 เลือกหน่วยเป็น ซม. เพื่อให้เป็นความยาวของครึ่งแกนตามขวาง
2. สร้างพารามิเตอร์ชื่อ  $b$  กำหนดค่าเป็น 1.5 เลือกหน่วยเป็น ซม. เพื่อให้เป็นความยาวของครึ่งแกนสังยุค
3. สร้างจุดอิสระ  $A$  บนแบบร่าง เลื่อนขนานจุด  $A$  แบบเชิงั่ว เป็นระยะทาง 1 ซม. ด้วยมุมศูนย์องศา จะได้จุด  $A'$  แล้วสร้างเส้นตรง  $AA'$
4. สร้างวงกลมที่มี  $A$  เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับพารามิเตอร์  $a$  วงกลมนี้ตัดกับเส้นตรง  $AA'$  ที่จุด  $B$  และ  $C$
5. สร้างวงกลมที่มี  $A$  เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับพารามิเตอร์  $b$  วงกลมนี้ตัดกับเส้นตรง  $AA'$  ที่จุด  $D$  และ  $E$
6. สร้างจุด  $F$  บนวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ  $b$  แล้วสร้างเส้นตรง  $AF$



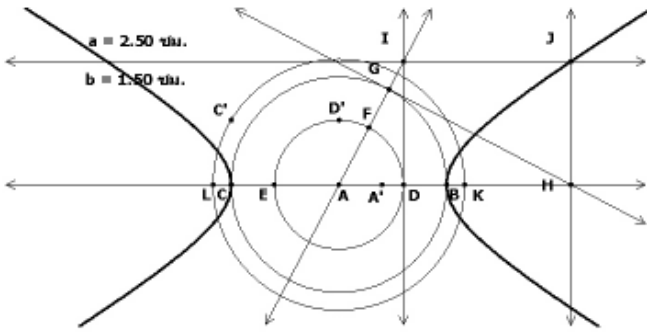
7. ลากจุด  $F$  เพื่อให้เส้นตรงเอียงขวา เส้นตรง  $AF$  ตัดกับวงกลม รัศมี  $a$  ทางด้านบนขวามือที่จุด  $G$
8. สร้างเส้นตั้งฉากกับเส้นตรง  $AF$  ที่จุด  $G$  เส้นตั้งฉากเส้นนี้ ตัดกับเส้นตรง  $AA'$  ที่จุด  $H$
9. สร้างเส้นตั้งฉากกับเส้นตรง  $AA'$  ที่จุด  $D$  เส้นตั้งฉากเส้นนี้ตัดกับเส้นตรง  $AF$  ที่จุด  $I$



10. สร้างเส้นตรงผ่านจุด  $I$  ให้ขนานกับเส้นตรง  $AA'$  และสร้างเส้นตรงผ่านจุด  $H$  โดยให้ตั้งฉากกับเส้นตรง  $AA'$  เส้นตรงทั้งสองที่ได้นี้จะตัดกันให้ชื่อจุดตัดว่าจุด  $J$  (ถ้าต้องการจุดโฟกัส ให้หมุนจุด  $D$  เป็นมุม 90 องศา โดยมีจุด  $A$  เป็นจุดศูนย์กลางของการหมุน จะได้จุด  $D'$  ล้อเลื่อนขนานจุด  $C$  ด้วยเวกเตอร์  $AD'$  จะได้จุด  $C'$  แล้วเขียนวงกลมที่มีจุด  $A$  เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับ  $AC'$  วงกลมนี้ตัดกับเส้นตรง  $AA'$  ที่จุด  $K$  และ  $L$  (ซึ่งจะเป็นจุดโฟกัส)



11. คลิกเลือกจุด F เพื่อเป็นจุดขับ คลิกเลือกจุด J เพื่อเป็นตัวถูกขับ และที่เมนูสร้างคลิกเลือกคำสั่ง โลกัส จะได้ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางยาว 5 เซนติเมตร และแกนสังยุคยาว 3 เซนติเมตร



**การเก็บเป็นเครื่องมือกำหนดเอง**

เมื่อสร้างไฮเพอร์โบลามาตามข้อ 1 - 11 แล้ว เราสามารถเก็บเป็นเครื่องมือสำหรับใช้สร้างไฮเพอร์โบล่าใดๆที่มีความยาวแกนตามขวางเป็น 2a เซนติเมตร และความยาวแกนสังยุคเป็น 2b เซนติเมตร ได้ดังนี้

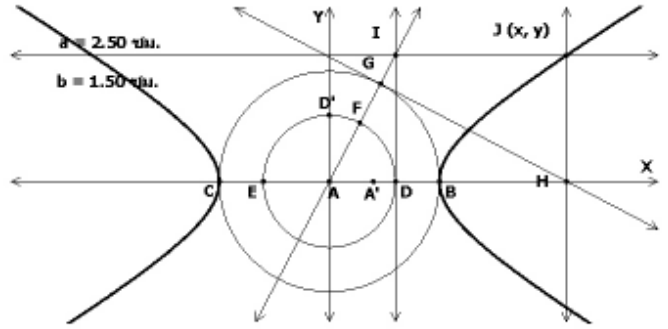
1. คลิกเลือกพารามิเตอร์ a และ พารามิเตอร์ b ตามลำดับ
2. คลิกเลือกจุด A ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบล่า (ในเวลาที่ใช้งาน ถ้าต้องการให้ปรากฏจุดยอด และจุดโฟกัส ให้คลิกเลือกจุด B, C, K และ L ด้วย )
3. คลิกเลือกที่กราฟ ซึ่งเป็นโลกัสของจุด J
4. คลิกค้างที่กล่องเครื่องมือกำหนดเอง คลิกเลือกคำสั่ง สร้างเครื่องมือใหม่ จะได้กล่องโต้ตอบเครื่องมือใหม่ ให้ชื่อเครื่องมือว่า ไฮเพอร์โบล่า

**วิธีใช้เครื่องมือ**

เมื่อมีค่าความยาว 2 ค่า ที่มีหน่วยเป็นเซนติเมตร ซึ่งจะกำหนดให้เป็นค่าความยาวของครึ่งแกนทั้งสองแล้ว (ถ้าค่านั้นเป็นค่าความยาวแกนให้คำนวณหาค่าความยาวครึ่งแกนเสียก่อน) ให้คลิกเลือกเครื่องมือไฮเพอร์โบล่าจากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง แล้วคลิกเลือกที่ค่าทั้งสองที่กำหนดให้เป็นความยาวของครึ่งแกนตามขวางและครึ่งแกนสังยุคตามลำดับ จากนั้นคลิกวางจุดศูนย์กลางตรงตำแหน่งที่ต้องการ ก็จะได้ไฮเพอร์โบล่าบนแบบร่าง และเมื่อมีการปรับเปลี่ยนค่าความยาว 2 ค่า นั้น กราฟที่ได้ก็จะเปลี่ยนแปลงไปด้วย

**จะแน่ใจได้อย่างไรว่ากราฟที่ได้เป็นไฮเพอร์โบล่าจริง**

เราทราบมาแล้วว่า ไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด(0, 0) แกนตามขวางยาว 2a หน่วย และแกนสังยุคยาว 2b หน่วยเมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกจะมีสมการเป็น  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ถ้ากราฟที่เราสร้างขึ้นด้วยวิธีดังกล่าวเป็นไฮเพอร์โบล่าจริง เมื่อเราให้เส้นตรง AA' แทนแกน X โดยมีจุด A เป็นจุดกำเนิด และเส้นตรง AD' แทนแกน Y เราจะต้องแสดงให้เห็นได้ว่า เมื่อจุด J ซึ่งเป็นโลกัสของกราฟมีพิกัดใดๆ เป็น (x, y) กราฟนี้จะมีสมการ เป็น  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ด้วย ซึ่งเราสามารถแสดงได้ดังนี้



จากรูป เมื่อ J มีพิกัดเป็น (x, y) จะได้  $x = AH$  ....(1)

และ  $y = HJ$  ....(2)

ให้ มุม BAI =  $\theta$

เนื่องจาก AD = b (รัศมีของวงกลมเล็ก)

จากสามเหลี่ยมมุมฉาก ADI ; DI = AD tan  $\theta$

จะได้ DI = b tan  $\theta$

แต่ DI = HJ จะได้ HJ = b tan  $\theta$  ....(3)

จากสามเหลี่ยมมุมฉาก AGH ; AG = AH cos  $\theta$

จะได้ AH = AG sec  $\theta$

แต่ AG = a (รัศมีวงกลมวงใหญ่)

จะได้ AH = a sec  $\theta$  ....(4)

จาก (2) และ (3) ; จะได้  $y = b \tan \theta$  ....(5)

จาก (1) และ (4) ; จะได้  $x = a \sec \theta$  ....(6)

จะแสดงว่า  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  นั้นจะเท่ากับ 1 หรือไม่

จาก (5) และ (6) จะได้  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a \sec \theta)^2}{a^2} - \frac{(b \tan \theta)^2}{b^2}$

$$= \frac{a^2 \sec^2 \theta}{a^2} - \frac{b^2 \tan^2 \theta}{b^2}$$

$$= \sec^2 \theta - \tan^2 \theta$$

$$= 1 + \tan^2 \theta - \tan^2 \theta$$

$$= 1$$

นั่นคือ จุด J(x, y) ใดๆ บนกราฟสอดคล้องกับสมการ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ดังนั้น จึงมั่นใจได้ว่ากราฟที่สร้างโดยวิธีดังกล่าวเป็น

ไฮเพอร์โบล่าที่มีแกนตามขวางยาว 2a หน่วย และแกนสังยุคยาว 2b หน่วยตามที่ต้องการ

ถ้าผู้อ่านต้องการสร้างเส้นกำกับ (asymptote) ของไฮเพอร์โบล่า ก็สามารถทำได้โดยง่ายเพียงแต่สร้างเส้นตรง AC' ก็จะได้เส้นกำกับเส้นหนึ่ง ส่วนอีกเส้นหนึ่งสร้างได้โดยสะท้อนเส้นตรง AC' โดยมีเส้นตรง AA' เป็นเส้นสะท้อน ซึ่งสามารถเก็บเป็นเครื่องมือกำหนดเองไว้เรียกใช้เมื่อต้องการได้เช่นเดียวกัน

