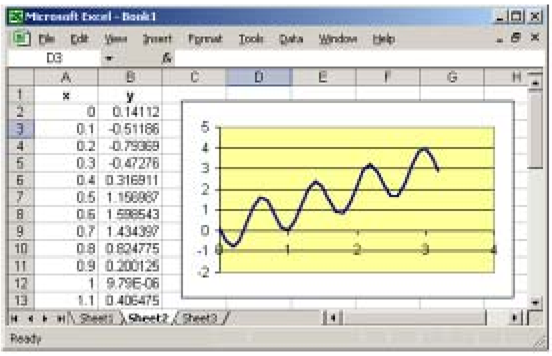
ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์ | รศ.ดร., ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การใช้ The Geometer´s Sketchpad ในมหาวิทยาลัย

เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันไม่เพียงแต่เป็นส่วนหนึ่งในชีวิตประจำวันของเราเท่านั้น แต่ยังมีบทบาทสำคัญต่อการเรียนการสอนในทุกระดับทุกวิชา ไม่เว้นแม้แต่วิชาคณิตศาสตร์ที่เดิมนั้นอาศัยเพียงกระดาษและดินสอ บวกกับจินตนาการบน*กระดาษที่มีขนาดไม่สิ้นสุด*ในสมองของเรา ด้วยความที่ผู้สอนไม่อาจล่วงรู้ถึงจินตนาการของผู้เรียนทุกคนได้ และบ่อยครั้งที่ผู้เรียนก็ไม่สามารถสื่อสารความคิดของตนเองทั้งที่ผิดและถูกออกมาให้ผู้อื่นเข้าใจได้โดยง่าย เกิดเป็นช่องว่างใหญ่ช่องหนึ่งในการเรียนการสอน จึงเห็นได้ว่ามีโปรแกรมคอมพิวเตอร์หลายโปรแกรมที่อาจไม่ได้พัฒนาขึ้นมาสำหรับงานคณิตศาสตร์ตรง ๆ แต่สามารถนำมาประยุกต์ใช้เพื่อพัฒนาทักษะของผู้เรียน และช่วยให้ผู้เรียนสามารถเดินตามผู้สอนในทิศทางที่ถูกต้องได้ง่ายขึ้น

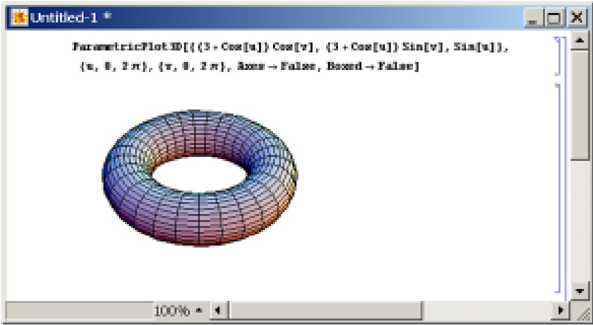
เมื่อพูดถึงคอมพิวเตอร์กับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ บางคนอาจนึกถึงสื่อการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นมาเพื่อช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสโต้ตอบกับเครื่องคอมพิวเตอร์ได้ตามสมควร หรือใช้เวลาศึกษาบทเรียนด้วยตนเองผ่านเครื่องคอมพิวเตอร์ เสมือนหนึ่งว่าสื่อนั้นเป็นผู้สอน จึงนับเป็นสิ่งที่อำนวยความสะดวกต่อผู้เรียน บางสื่ออาจมีภาพเคลื่อนไหว แสดงการเขียนเส้นกราฟ หรือแม้แต่สุ่มสร้างแบบทดสอบด้วย สื่อเหล่านี้ไม่สามารถทดแทนตำราที่พิมพ์มาเป็นเล่มๆ ได้ แต่เป็นสิ่งที่เสริมเนื้อหาในตำรา และอาจช่วยให้ผู้เรียนรู้สึกว่าเป็นเหมือนตำราที่มีชีวิต



รูปที่ 1

รูปที่ 2

โปรแกรมกลุ่มหนึ่งที่หลายคนอาจนึกถึงก็คือโปรแกรมประเภทเครื่องคำนวณทั้งหลาย ซึ่งรวมความถึงเครื่องคิดเลขจริงๆ ที่ปัจจุบันมีการพัฒนาขีดความสามารถจนเป็นเหมือนเครื่องคอมพิวเตอร์เล็กๆ ไปจนถึงโปรแกรม spreadsheet อย่าง Microsoft Excel หรือโปรแกรมคำนวณขั้นสูงอย่าง Mathematica, Maple, Matlab หรือ Mathcad เป็นต้น โปรแกรมเหล่านี้มีความสามารถสูงที่นำมาประยุกต์ใช้ได้ตั้งแต่คิดคำนวณตัวเลขที่เราทำด้วยมือลำบาก เช่น คำนวณค่า π ให้ถูกต้อง



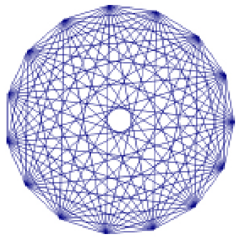
รูปที่ 3

ถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 100 ดังแสดงในรูปที่ 2 หรือร่างผิวสามมิติดังตัวอย่างในรูปที่ 3 ไปจนถึงการสร้างระบบทางคณิตศาสตร์อันซับซ้อน

โปรแกรมที่ได้กล่าวถึงมานี้ แม้จะมีขีดความสามารถสูง แต่ยังขาดการให้ผู้ใช้ได้มีโอกาสขยับไม้ขยับมือสำรวจความคิดของตนเองในมุมต่างๆ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับการเรียนรู้ในทุกระดับ ไม่เว้นแม้แต่การศึกษาในระดับมหาวิทยาลัย บ่อยครั้งที่พบว่านิสิต นักศึกษาสามารถคำนวณหรือแก้ปัญหาตามความรู้ที่ศึกษามาได้ถูกต้อง แต่เมื่อต้องนำความรู้พื้นฐานเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาจริง กลับไม่ประสบผลสำเร็จอย่างที่ควรจะเป็น ยิ่งกว่านี้ การแก้ปัญหาบางปัญหายังต้องการการเชื่อมโยงแนวคิดด้านต่างๆ เข้าด้วยกันอย่างเหมาะสม ผู้เขียนได้มีโอกาสสอนรายวิชา คณิตศาสตร์เชิงคำนวณสำหรับนิสิตชั้นปีที่ 2 ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ ที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย จุดมุ่งหมายหนึ่งในรายวิชานี้คือการให้นิสิตได้ตระหนักความสำคัญของเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ที่มีต่อการพัฒนางานในสาขาต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ เมื่อผู้เขียนได้มีโอกาสนำโปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือที่บางที่เราเรียกกันสั้นๆ ว่า GSP มาลองใช้กับนิสิตกลุ่มนี้ พบว่านิสิตรู้สึกสนุกไปกับการเรียนรู้คณิตศาสตร์และได้ฝึกการวางแผนและการเรียบเรียงความคิดอย่างเป็นขั้นเป็นตอนในการสร้างชิ้นงานเพื่อตอบปัญหาแต่ละข้อในชั้นเรียน จึงขอยกตัวอย่างให้เห็นดังนี้

เริ่มด้วยตัวอย่างเล็กๆ จากทฤษฎีกราฟ เราทราบกันว่ากราฟประกอบด้วยจุดและเส้นเชื่อมจุด ถ้ามีเส้นเชื่อมระหว่างจุดทุกคู่ที่เป็นไปได้

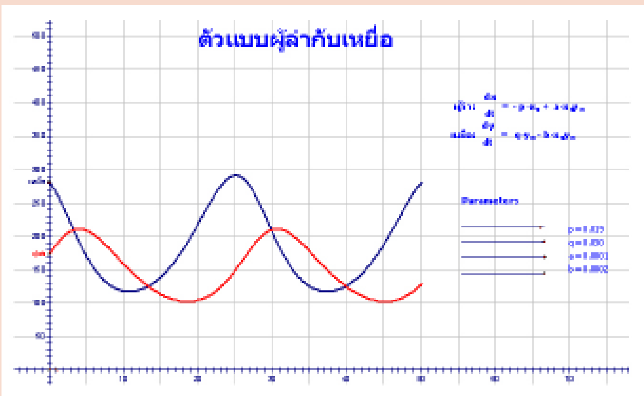
รูปที่ 4



กราฟนั้นจะเรียกว่า *กราฟบริบูรณ์* (complete graph) ในกรณีที่มีจุด 3 จุด เมื่อลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดทุกคู่ที่เป็นไปได้ จะเกิดรูปสามเหลี่ยมขึ้น ในกรณีที่มี 5 จุด เมื่อลากเส้นเชื่อมครบทั้ง 10 เส้นระหว่างจุดทุกคู่ที่เป็นไปได้ จะได้กราฟที่มีลักษณะคล้ายรูปดาว เป็นต้น คราวนี้ลองจินตนาการต่อไปอีกว่าถ้ามีจุด 15 จุด เมื่อลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดทุกคู่ที่เป็นไปได้แล้ว จะได้กราฟที่มีลักษณะอย่างไร เราสามารถคำนวณได้ไม่ยากว่าจะมีเส้นเชื่อมที่เป็นไปได้ทั้งหมด $\binom{15}{2} = \frac{15!}{13!2!} = 105$ เส้น ซึ่งเมื่อสร้างในโปรแกรม GSP จะได้ลักษณะกราฟดังแสดงในรูปที่ 4 ซึ่งถ้าเป็นการสร้างบนกระดาษจริงๆ เราจะเขียนจุด 15 จุด และลากเส้นเชื่อมจนครบตรงๆ แต่ถ้าต้องทำใน GSP แล้ว ควรจะมีคำถามเกิดขึ้นในใจทันทีว่า เราจะมีวิธีการสร้างอย่างไร ที่ไม่ต้องใช้ความอดทนในการเขียนจุดทั้ง 15 จุด และลากเส้นทั้ง 105 เส้น หรือแม้แต่จะตอบคำถามในกรณีทั่วไปว่าเมื่อมีจุด n จุด แล้วจะลากเส้นให้ครบทั้ง $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ เส้นได้อย่างไร แนวทางหนึ่งในการสร้างกราฟบริบูรณ์นี้ได้นำแนวคิดในการคำนวณทางพีชคณิตมาช่วยสร้างรูปเรขาคณิตที่ปรากฏเป็นกราฟบริบูรณ์ดังที่เห็น สำหรับผู้ที่สนใจรายละเอียดการสร้าง ขอให้อ่านเพิ่มเติมจากบทความเรื่อง "กราฟบริบูรณ์ใน GSP" ในวารสารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ปริมา 52 ฉบับที่ 584-586 พฤษภาคม - กรกฎาคม 2550

ตัวอย่างต่อไปเป็นตัวแบบผู้ล่ากับเหยื่อ ซึ่งประกอบด้วยสิ่งมีชีวิตสองชนิดที่มีความสัมพันธ์กันในฐานะที่ชนิดหนึ่งเป็นผู้ล่าและอีกชนิดหนึ่งเป็นเหยื่อ เช่น เสือกับกระต่าย เป็นต้น การเปลี่ยนแปลงจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตแต่ละชนิดเป็นผลจากความสัมพันธ์ภายในกลุ่มสิ่งมีชีวิตชนิดนั้น และความสัมพันธ์ที่มีต่อสิ่งมีชีวิตชนิดอื่น ซึ่งสามารถเขียนในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

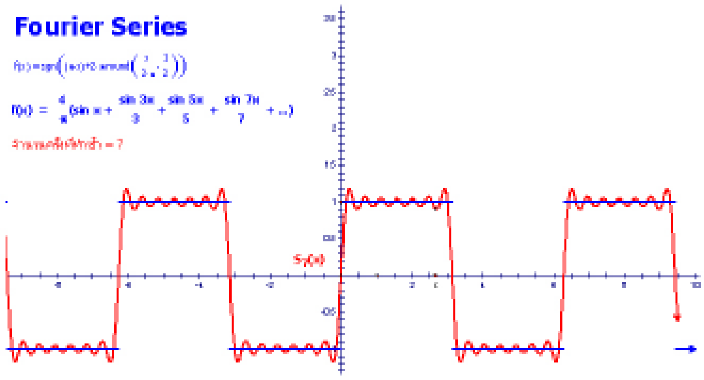
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -px + axy \\ \dfrac{dy}{dt} = qy + bxy \end{cases}$$



รูปที่ 5

เมื่อ และ เป็นจำนวนประชากรผู้ล่าและเหยื่อที่เวลา ตามลำดับ พจน์ แสดงให้เห็นว่าผู้ล่าไม่อาจดำรงชีวิตอยู่ได้โดยปราศจากเหยื่อ ในขณะที่ นั้นแสดงให้เห็นว่าเหยื่อดำรงชีวิตได้ด้วยอาหารในระดับขั้นที่ต่ำกว่าในห่วงโซ่อาหาร (เช่นกระตายกินหญ้า) ส่วนพจน์ แสดงให้เห็นว่า กระต่ายเป็นอาหารให้กับเสือ และพจน์ แสดงให้เห็นว่าเสือล่ากระต่าย คำถามพื้นฐานที่เราต้องการตอบคือจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตทั้งสองชนิดในระยะยาวจะเป็นอย่างไร ซึ่งคำตอบเหล่านี้ขึ้นกับพารามิเตอร์หลายตัว ได้แก่ จำนวนประชากรเริ่มต้นของสิ่งมีชีวิตทั้งสอง รวมถึงค่าคงตัว a, b, p, q ด้วย เมื่อใช้วิธีเชิงตัวเลขและการทำซ้ำใน GSP คำนวณหาจำนวนผู้ล่ากับเหยื่อตามค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด จะได้ผล ดังแสดงในรูปที่ 5 ซึ่งผู้ใช้สามารถเลื่อนปรับจำนวนประชากรเริ่มต้น และค่าคงตัวต่างๆ เพื่อสังเกตผลกระทบที่มีต่อจำนวนประชากรได้ทันที ด้วยวิธีการเราจะสามารถสำรวจและวางแผนได้โดยง่ายว่าควรต้องปรับพารามิเตอร์ใด เพื่อควบคุมจำนวนประชากรให้เหมาะสม

ตัวอย่างสุดท้ายเป็นตัวอย่างการวิเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ในวิชาแคลคูลัส ซึ่งมีที่ประยุกต์ใช้งานอย่างกว้างขวางทั้งในทางฟิสิกส์และทางวิศวกรรมศาสตร์ เช่น เราต้องการวิเคราะห์ว่าคลื่นรูปสี่เหลี่ยมประกอบคลื่นไซน์พื้นฐานความถี่ใดบ้าง และแต่ละความถี่มีสัดส่วนเท่าใด ในที่นี่เราแสดงตัวอย่างคลื่นสี่เหลี่ยมที่มีคาบ 2π ที่กำหนดค่าในคาบหนึ่งด้วย



รูปที่ 6

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } 0 \le x < \pi \\ -1 & \text{เมื่อ } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

ซึ่งวิเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ได้เป็น

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots\right)$$

ปัญหาหนึ่งที่เป็นอุปสรรคในการเข้าใจอนุกรมฟูเรียร์คือการทำให้ผู้เรียนเชื่อว่าอนุกรมที่แต่ละพจน์อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ที่ความถี่ต่างๆ จะรวมกันเป็นคลื่นรูปสี่เหลี่ยมที่ไม่ต่อเนื่องได้อย่างไร ในรูปที่ 6 ได้แสดงผลจากการคำนวณผลบวกย่อย 7 พจน์แรกของอนุกรมฟูเรียร์ด้วยการทำซ้ำใน GSP ซึ่งมีพารามิเตอร์สำหรับควบคุมจำนวนครั้งในการทำซ้ำ เพื่อให้ผู้ใช้ได้ลองปรับเปลี่ยนและสังเกตการเปลี่ยนแปลง ซึ่งช่วยให้เรามองเห็นว่าเมื่อเพิ่มจำนวนพจน์ในผลบวกย่อยแล้วผลบวกย่อยจะลู่เข้าสู่ฟังก์ชันที่ต้องการได้อย่างไร

จะเห็นว่า GSP ไม่ได้มีการใช้งานจำกัดเฉพาะในวิชาเรขาคณิตเท่านั้น แต่สามารถประยุกต์ใช้กับการเรียนการสอนได้หลากหลายรูปแบบ ตามแต่จินตนาการของผู้ใช้ สิ่งเหล่านี้ช่วยเสริมสร้างจินตนาการของผู้เรียนที่ได้ใช้สื่อ GSP ในการสำรวจความคิด และยิ่งเสริมจินตนาการของผู้สอนที่จะประยุกต์ GSP เข้ากับเรื่องต่างๆ ให้ได้