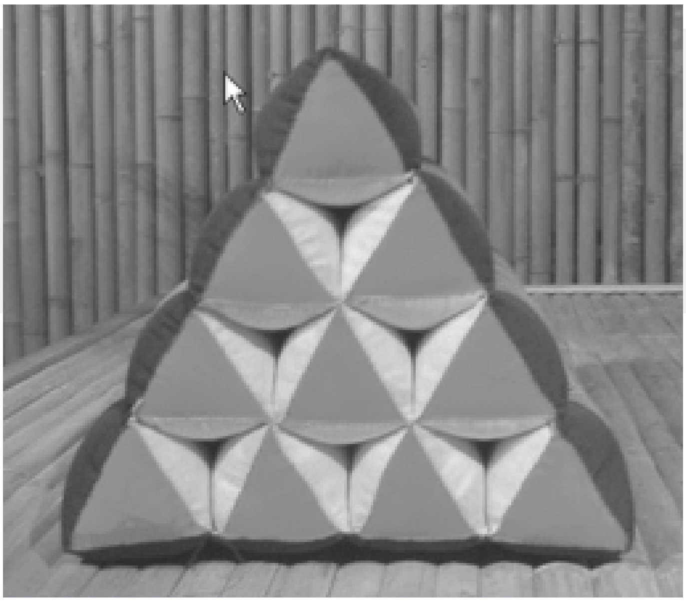
ปรีชา เนาว์เย็นผล | ดร. ผู้เชี่ยวชาญ สาขาคณิตศาสตร์ สสวท. | E-mail : edasnpre@stou.ac.th

หมอนขวาน กับ แบบรูปของจำนวน



หมอนขวานมีหน้าตัดโดยภาพรวมเป็นรูปสามเหลี่ยมเช่นเดียวกับหน้าตัดด้านข้างของขวานซึ่งน่าจะเป็นที่มาของชื่อหมอน หมอนขวานเป็นของใช้ในครัวเรือนของชาวอีสาน นอกจากใช้หนุนพิงหลังเมื่อนั่งพักผ่อนแล้วยังใช้เป็นสิ่งประดับตกแต่งได้อีกด้วย ด้านนอกของหมอนขวานมักใช้ผ้าที่มีลวดลายสวยงามเรียกว่าผ้าลายขิด หมอนขวานจึงมีชื่ออีกอย่างหนึ่งว่า "หมอนขิด" มองในเชิงเรขาคณิตหมอนขวานประกอบด้วยปริซึมฐานสามเหลี่ยมขนาดเท่า ๆ กัน ภายในอัดแน่นด้วยนุ่นจนทำให้ปริซึมเปลี่ยนรูปไปจนเกือบเป็นทรงกระบอก แต่ก็ยังทิ้งร่องรอยของปริซึมฐานสามเหลี่ยมไว้ให้เห็น

หมอนขวานกับการนับ

การนับเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาเกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ ซึ่งมีความเชื่อมโยงกับเรื่องความน่าจะเป็น อันเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการวางแผนตัดสินใจในการดำเนินกิจกรรมบางอย่างที่อยู่ภายใต้ภาวะของความไม่แน่นอน การนับต้องนับอย่างครบถ้วนถูกต้อง ซึ่งต้องดำเนินการนับอย่างเป็นระบบ ที่หน้าตัดของหมอนขวานประกอบด้วยรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ที่เป็นหน้าตัดของหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ หนึ่งลูก สองลูก และเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างเป็นระบบ เราสามารถใช้หมอนขวานเป็นสื่อในการสร้างระบบการนับ โดยเริ่มจากการสังเกตสำรวจ ค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูล แล้วใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยสร้างกฎเกณฑ์ของการนับ

ปัญหา

1. ถ้าต้องการสร้างหมอนขวานที่แถวล่างสุดประกอบด้วยหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็กๆ จำนวน 8 ลูก จะต้องใช้หมอนรูปสามเหลี่ยมเล็กๆ ทั้งหมดกี่ลูก

2. ในกรณีทั่วไป ถ้าต้องการสร้างหมอนขวานที่แถวล่างสุดประกอบด้วยหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็กๆ จำนวน n ลูก จะต้องใช้หมอนรูปสามเหลี่ยมเล็กๆ ทั้งหมดกี่ลูก

คำตอบ

1. จากรูปข้างต้น ในแถวล่างสุดประกอบด้วยหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็กๆ 4 ลูก ใช้หมอนรูปสามเหลี่ยมเล็กๆ ทั้งหมด 1 + 2 + 3 + 4 = 10 ลูก

ถ้าต้องการสร้างหมอนขวานที่แถวล่างสุดประกอบด้วยหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็กๆ 8 ลูก จะต้องใช้หมอนรูปสามเหลี่ยมเล็กๆ ทั้งหมด 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 36 ลูก

2. ถ้าต้องการสร้างหมอนขวานที่แถวล่างสุดประกอบด้วยหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ จำนวน n ลูก จะต้องใช้หมอนรูปสามเหลี่ยมเล็กๆ ทั้งหมด 1 + 2 + 3 + ... + n ลูก

วิธีหาผลบวก ให้

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$

และ $$S = n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

ดังนั้น $$2S = (1+n) + (1+n) + \ldots + (1+n) \quad \text{จำนวน } n \text{ คู่}$$

$$= n \times (1+n)$$

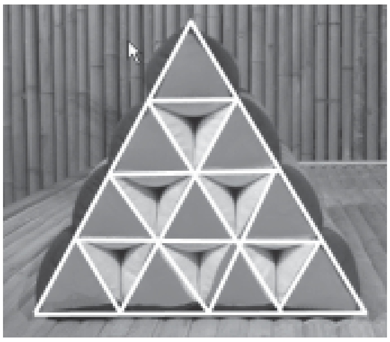
$$S = \frac{n \times (1+n)}{2}$$

เราได้สูตรในการหาผลบวกของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n

เช่น ถ้าต้องการหาผลบวกของจำนวนนับ ตั้งแต่ 1 ถึง 100 จะได้เท่ากับ

$$\frac{100 \times (1+100)}{2} = 5{,}050$$

หมอนขวานกับผลบวกของจำนวนคี่



จากรูปหมอนขวานข้างต้นถ้าเราต้องการนับจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่เป็นช่องว่างด้วย เราจะจัดระบบการนับอย่างไร

ถ้าใช้วิธีนับทีละแถวจากแถวบนสุดลงมา จะได้ระบบการนับดังตาราง

แถวที่	1	2	3	4	5
ระบบการนับ	1	1+3	1+3+5	1+3+5+7	....
จำนวน △	1	4	9	16	....

จะสังเกตพบว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ในแต่ละแถว ได้แก่ 1, 3, 5, 7 เป็นจำนวนคี่ และผลรวมของจำนวนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ทั้งหมดก็คือ ผลบวกของจำนวนคี่ที่เรียงติดต่อกันตั้งแต่ 1 ถึง จำนวนรูปสามเหลี่ยมในแถวล่างสุด ซึ่งพบว่าผลบวกเท่ากับ $1 = 1^2$, $4 = 2^2$,

$9 = 3^2$, $16 = 4^2$ ตามลำดับผลบวกนี้เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ที่มีจำนวนซึ่งเป็นฐานของเลขยกกำลังเท่ากับจำนวนหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็กๆ ในแถวล่างสุดนั่นเอง

ปัญหา

3. ถ้าต้องการสร้างหมอนขวานที่แถวล่างสุดประกอบด้วยหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ จำนวน 8 ลูก จะนับจำนวนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ซึ่งเท่ากันทุกประการทั้งหมดที่เกิดขึ้นได้กี่ลูก

4. ถ้าต้องการสร้างหมอนขวานที่แถวล่างสุดประกอบด้วยหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ จำนวน n ลูก จะนับจำนวนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ซึ่งเท่ากันทุกประการทั้งหมดที่เกิดขึ้นได้กี่ลูก

คำตอบ

3. โดยอาศัยการสังเกตแบบรูปของจำนวนจากตารางข้างต้น จะได้ว่า หมอนขวานที่แถวล่างสุดประกอบด้วยหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ จำนวน 8 ลูก จะนับจำนวนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ซึ่งเท่ากันทุกประการทั้งหมดที่เกิดขึ้นได้เท่ากับ $8^2 = 64$ ลูก

4. ในทำนองเดียวกันกับข้อ 3 หมอนขวานที่แถวล่างสุดประกอบด้วยหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ จำนวน n ลูก จะนับจำนวนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ซึ่งเท่ากันทุกประการทั้งหมดที่เกิดขึ้น n^2 ลูก

การหาคำตอบของข้อ 3 และ 4 กระทำโดยการสังเกตแบบรูปของจำนวนจากตัวอย่างหลายตัวอย่าง เป็นการหาคำตอบโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งในบางครั้งถ้ามีตัวอย่างให้สังเกตไม่มากพอข้อสรุปที่ได้ซึ่งเรียกว่า "**ข้อความคาดการณ์** (conjecture)" อาจมีความคลาดเคลื่อนไม่ถูกต้อง ในคณิตศาสตร์ระดับที่สูงขึ้นจะต้องแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์นั้นว่าเป็นจริงหรือไม่โดยการพิสูจน์ ซึ่งเรียกว่าเป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัย

จำนวนคี่ 1, 3, 5, 7, 9, ... มีรูปทั่วไปเป็น 2n-1 เมื่อ n = 1, 2, 3, 4, ... ซึ่ง n เป็นลำดับที่ของจำนวนคี่ ในที่นี้ n เท่ากับจำนวนหมอนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ในแถวล่างสุดของหมอนขวาน

ข้อความที่เป็นคำตอบของปัญหานี้มีความเกี่ยวข้องกับจำนวนนับ n ให้ P(n) แทนข้อความดังนี้

"P(n) แทนข้อความ $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ"

ต่อไปนี้จะแสดงว่าข้อความนี้เป็นจริง ด้วยการใช้**การพิสูจน์แบบอุปนัยทางคณิตศาสตร์** โดยจะแสดงว่า ก. P(1) เป็นจริง และ ข. ให้ P(k) เป็นจริง แล้วแสดงว่า P(k+1) เป็นจริง

พิสูจน์

ก. P(1) แทน $1 = 1^2$ จะเห็นว่าเป็นจริง

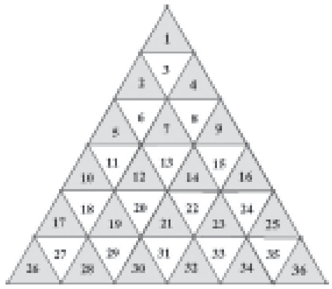
ข. ให้ P(k) แทน $1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k^2$

เป็นจริงสำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2(k+1)-1) &= k^2 + (2(k+1)-1) \\ &= k^2 + ((2k+2)-1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

จะได้ว่า P(k+1) เป็นจริง

ดังนั้น P(n) เป็นจริงสำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ



ถ้าเขียนตัวเลขแสดงจำนวนนับตั้งแต่ 1, 2, 3, ... บนรูปสามเหลี่ยมที่หน้าตัดของหมอนขวานเรียงลำดับต่อเนื่องกันไปจากแถวบนสุดไปจนถึงแถวล่างสุดของหมอนขวานที่มีหลายๆ แถว จะสังเกตเห็นอะไรบ้าง

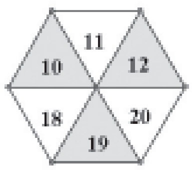
จำนวนสุดท้ายของแต่ละแถว ได้แก่ **1, 4, 9, 25, 36** เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ ทำให้ได้แนวคิดว่าจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ปรากฏอยู่ในกลุ่มจำนวนนับอย่างมีระเบียบแบบแผน พิจารณาตารางต่อไปนี้

จำนวนนับของแต่ละแถว	ข้อสังเกต (1)	ข้อสังเกต (2)
1	มี 1 จำนวนเดียว	1 = 1
2 3 **4**	มีจำนวนนับเพิ่มขึ้นอีก 3 จำนวน	1+3 = 4
5 6 7 8 **9**	มีจำนวนนับเพิ่มขึ้นอีก 5 จำนวน	1+3+5 = 9
10 11 12 13 14 15 **16**	มีจำนวนนับเพิ่มขึ้นอีก 7 จำนวน	1+3+5+7 = 16
17 18 19 20 21 22 23 24 **25**	มีจำนวนนับเพิ่มขึ้นอีก 9 จำนวน	1+3+5+7+9 = 25
26 27 28 29 30 31 33 34 35 **36**	มีจำนวนนับเพิ่มขึ้นอีก 11 จำนวน	1+3+5+7+9+11 = 36

จำนวนของจำนวนนับที่เพิ่มขึ้นในแต่ละแถว เป็นจำนวนคี่ได้แก่ 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... และผลบวกของจำนวนของจำนวนนับที่เพิ่มขึ้นนี้เท่ากับ จำนวนสุดท้ายของแต่ละแถวซึ่งเป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ แสดงว่าจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ปรากฏอยู่ในหมู่ของจำนวนนับอยู่ห่างกันนับจาก 1 เป็นตำแหน่งที่ 3, 5, 7, 9, 11, ซึ่งเรียงตัวอยู่ในตำแหน่งต่างๆ อย่างเป็นระบบ

ค้นหาแบบรูปของจำนวนในรูปหกเหลี่ยมบนหมอนขวาน

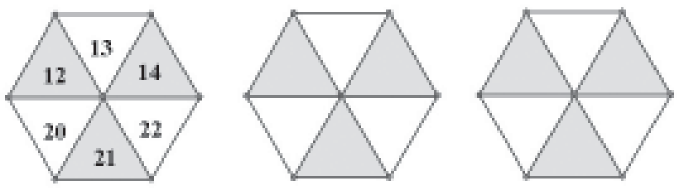
พิจารณาจำนวนหกจำนวนในรูปหกเหลี่ยมใด ๆ บนหน้าตัดของหมอนขวาน เช่น



พบว่า ผลบวกของจำนวนแต่ละคู่ที่อยู่ตรงข้ามกัน เท่ากัน กล่าวคือ

10 + 20 = 11 + 19 = 12 + 18

ให้สำรวจว่าจำนวนหกจำนวนในรูปหกเหลี่ยมอื่น ๆ มีสมบัติเช่นนี้หรือไม่ และมีข้อค้นพบที่น่าสนใจอะไรอีกหรือไม่



การเติมตัวเลขที่เป็นจำนวนนับลงในรูปสามเหลี่ยมบนหน้าตัดหมอนขวานทำให้เห็นความกลมกลืนกันของแบบรูปของจำนวน กับแบบรูปทางเรขาคณิต มาช่วยกันสำรวจต่อไปว่าความงามลักษณะเช่นนี้มีอยู่ในสิ่งประดิษฐ์ทางวัฒนธรรมของไทยสิ่งใดอีกบ้าง