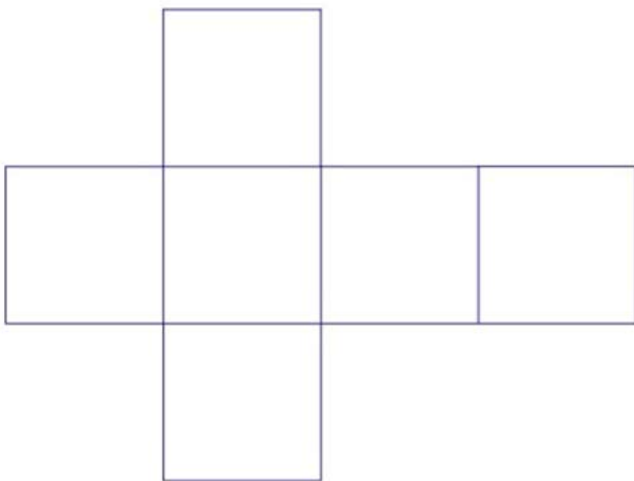


มหัศจรรย์ฟังก์ชัน **sgn**

ที่มา...

เช้าวันหนึ่งเด็กหญิงตุ๊กตาได้นำปัญหาคณิตศาสตร์มาถามป้าตัว โดยปัญหาดังกล่าวมีดังนี้

“ในการทำกล่องทรงลูกบาศก์มักจะตัดกระดาษดังรูปที่ 1 ถ้ามีกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดกว้าง 10 นิ้ว ยาว 13 นิ้ว และต้องการทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุด จะต้องทำกล่องให้มีความยาวของแต่ละด้านเป็นกี่นิ้ว และมีปริมาตรเป็นเท่าใด (ตอบทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง)”

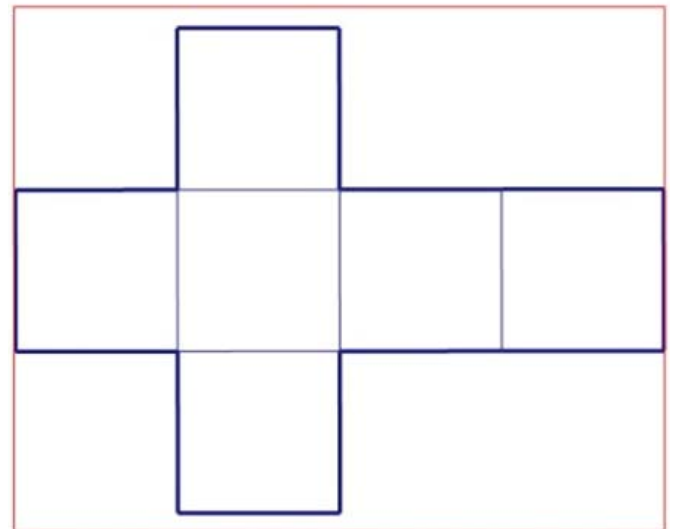


รูปที่ 1

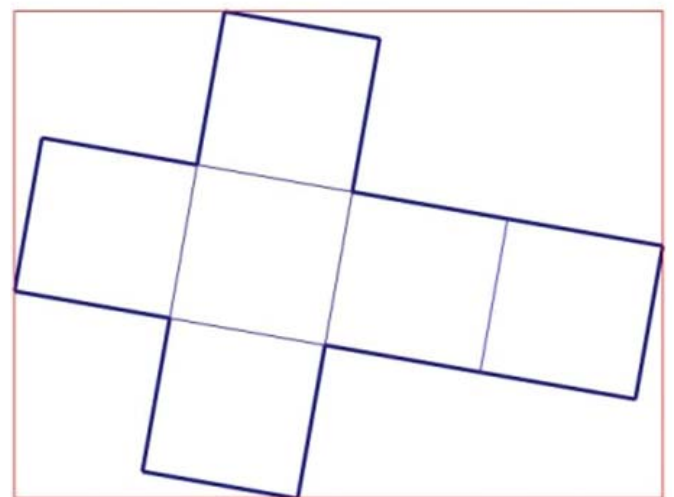
เมื่อป้าตัวอ่านปัญหาจบก็ตอบเด็กหญิงตุ๊กตาว่า “จะไปยากอะไรก็เอา 4 ทหารความยาวของด้านยาว และเอา 3 ไปหารความยาวของด้านกว้าง ผลหารของคูใดที่มีค่าน้อยกว่าก็ใช้ค่านั้นเป็นความยาวของด้านของกล่องลูกบาศก์”

“จริงด้วยสิคะป้า” เด็กหญิงตุ๊กตาตอบ “แต่เอคุณป้าคะ ถ้าเราวางแบบภาพคลี่ของลูกบาศก์ในแนวอื่นที่ไม่ขนานกับด้านกว้างหรือด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เราจะได้กล่องลูกบาศก์ที่มีขนาดใหญ่กว่าไหมคะ”

ป้าตัว “ #!?!#!!#?!?...นั่นคงเป็นปัญหาของตุ๊กตาแล้วละ”



ก)



ข)

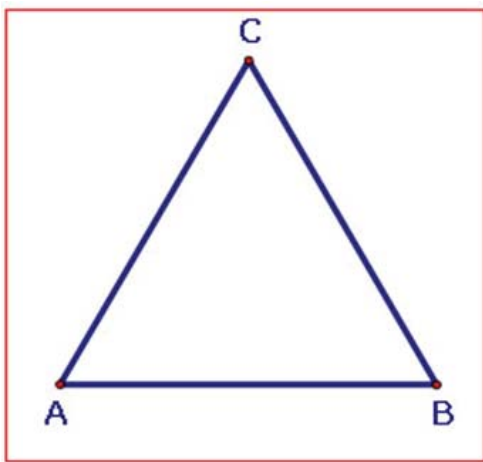
รูปที่ 2

แล้วท่านผู้อ่านละครับคิดว่าเมื่อวางแบบของลูกบาศก์ในแนวที่เอียงทำมุมกับด้านยาวแล้วกล่องลูกบาศก์จะมีขนาดใหญ่กว่าหรือเปล่า เพราะเหตุใด

ที่ไป...

จากปัญหาคณิตศาสตร์ข้างต้นเราสามารถใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สร้างแบบจำลองเพื่อสืบเสาะหาคำตอบได้ แต่การสร้างแบบจำลองเพื่อแก้ปัญหาของตุ๊กตาอาจซับซ้อนเล็กน้อย เราควรเริ่มต้นด้วยการสร้างแบบจำลองแก้ปัญหาง่าย ๆ ก่อน

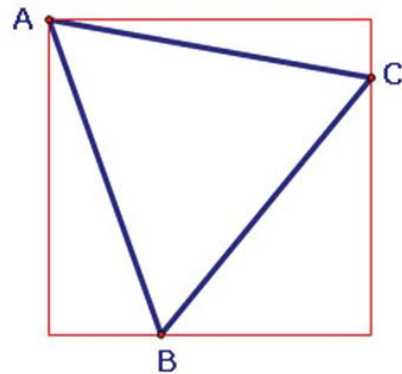
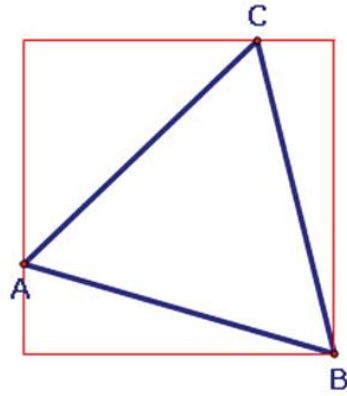
“ต้องการตัดกระดาษเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านเท่ากับ 5 เซนติเมตร จากกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้กระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่น้อยที่สุด อยากทราบว่ากระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากต้องมีขนาดเท่าไร และต้องวางแบบของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าอย่างไร”



รูปที่ 3

เมื่อจะสร้างแบบจำลองเราก็ต้องมาวิเคราะห์กันก่อนว่าจะต้องวางแบบของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าลงบนกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากอย่างไร เพื่อให้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีพื้นที่น้อยที่สุด นั่นคือการวางแบบของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะต้องให้จุดยอดมุมทุกจุดอยู่บนด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้นในการสร้างแบบจำลองดังกล่าวโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สิ่งที่เราต้องระลึกไว้เสมอคือ ไม่ว่าเราจะหมุนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าไปอย่างไรก็ตาม จุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะต้องมีด้านของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากผ่านอย่างน้อยหนึ่งด้านเสมอ

คำถามต่อมาก็คือเมื่อเราลากจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าให้วางอยู่ในตำแหน่งต่าง ๆ เพื่อสืบเสาะหาคำตอบ Sketchpad จะรู้ได้อย่างไรว่าจุดยอดมุมโดยอยู่ข้างบน จุดยอดมุมโดยอยู่ข้างล่าง จุดยอดมุมโดยอยู่ทางขวา จุดยอดมุมโดยอยู่ทางซ้าย หรืออยู่ในระดับเดียวกัน โดยที่มีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าอยู่ตลอดเวลา



รูปที่ 4

คำตอบคือ Sketchpad ไม่มีทางรู้ได้ นอกจากเราจะต้องกำหนดพิกัดให้จุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ละจุดก่อน แล้วสร้างเงื่อนไขให้ Sketchpad รู้ว่าจุดใดมีพิกัดทางแกน X มากกว่า และจุดใดมีพิกัดทางแกน Y มากกว่า การกำหนดพิกัดไม่ใช่เรื่องยาก แต่สิ่งที่ยากสำหรับคนที่ยังไม่รู้จักคือเราจะสร้างเงื่อนไขได้อย่างไร (สำหรับคนที่รู้แล้วก็ข้ามบทความนี้ไปได้ครับ) ในโปรแกรม The Geometer's Sketchpad มีฟังก์ชันอยู่ฟังก์ชันหนึ่งที่เราใช้สำหรับสร้างเงื่อนไขได้ ฟังก์ชันนั้นก็คือ ฟังก์ชัน sgn

ฟังก์ชัน sgn คืออะไร

ในทางคณิตศาสตร์ และโดยเฉพาะในวิชาคอมพิวเตอร์ มีฟังก์ชัน ๆ หนึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงตรรก (logical function) ที่ใช้แยกเครื่องหมายออกจากจำนวนจริง มีชื่อว่าฟังก์ชันเครื่องหมาย (sign function) เพื่อหลีกเลี่ยงความสับสนกับฟังก์ชัน sine ฟังก์ชันนี้จึงเรียกว่า ฟังก์ชันซิกนัม (signum function) และใช้สัญลักษณ์ sgn โดยมีนิยามดังนี้

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ -1 & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

ในโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ฟังก์ชัน sgn จะอยู่ในคำสั่งคำนวณ ในเมนูการวัด และ คำสั่งฟังก์ชันใหม่... ในเมนูกราฟ เราสามารถใช้ฟังก์ชัน sgn แสดงเครื่องหมายของจำนวนจริง สร้างเงื่อนไขการแสดงสีของอ็อบเจกต์ สร้างเงื่อนไขการปรากฏและไม่ปรากฏของอ็อบเจกต์ เขียนฟังก์ชันแบบมีเงื่อนไข ฯลฯ ในบทความนี้เราจะสร้างเครื่องมือกำหนดเองสำหรับแสดงจำนวนที่มากที่สุด และจำนวนที่น้อยที่สุด โดยใช้ฟังก์ชัน sgn จากนั้นจะนำเครื่องมือกำหนดเองที่ได้ไปใช้ตรวจสอบว่าจุดยอดมุมใดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีพิกัดที่หนึ่ง (x) มากที่สุดหรือน้อยที่สุด

ให้ a และ b เป็นจำนวนสองจำนวน ถ้าต้องการให้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad แสดงจำนวนที่มากกว่า สิ่งที่ต้องทำก็คือ

1. คำนวณหาค่า $\text{sgn}(a - b)$
2. คำนวณหาจำนวนที่มีค่ามากกว่าจาก นิพจน์

$$\frac{(a + b) + \text{sgn}(a - b) * (a - b)}{2}$$

จากนิพจน์ในข้อ 2

ถ้า $a > b$ ค่าของ $\text{sgn}(a - b)$ จะเท่ากับ 1
 นิพจน์จะเป็น $\frac{(a + b) + 1 * (a - b)}{2} = a$

ถ้า $a = b$ ค่าของ $\text{sgn}(a - b)$ จะเท่ากับ 0
 นิพจน์จะเป็น $\frac{(a + b) + 0 * (a - b)}{2} = a$ หรือ b

ถ้า $a < b$ ค่าของ $\text{sgn}(a - b)$ จะเท่ากับ -1
 นิพจน์จะเป็น $\frac{(a + b) + (-1) * (a - b)}{2} = b$

ในการทำงานเดียวกันถ้าต้องการให้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad แสดงจำนวนที่น้อยกว่าขั้นตอนการทำงานก็ยิ่งเหมือนเดิมเพียงแต่เปลี่ยนนิพจน์เป็น

$$\frac{(a + b) - \text{sgn}(a - b) * (a - b)}{2}$$

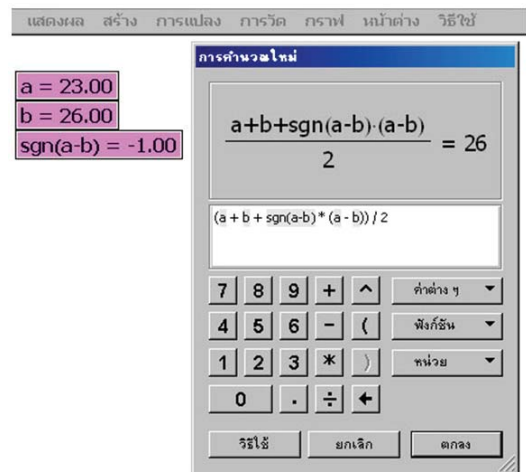
เมื่อทราบขั้นตอนการทำงานแล้วก็ถึงเวลาของการสร้างเครื่องมือกำหนดเอง

การสร้างเครื่องมือกำหนดเอง max(a, b) และ min(a, b)

วิธีสร้างนี้เขียนภายใต้สมมติฐานว่าผู้อ่านสามารถใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ได้ดีพอสมควร

1. สร้างพารามิเตอร์ สองตัว a และ b
2. เปรียบเทียบพารามิเตอร์ a และ b ว่าตัวไหนมีค่ามากกว่า โดยคำนวณ $\text{sgn}(a - b)$ ด้วยคำสั่ง คำนวณ จากเมนูการวัด
3. ให้ Sketchpad แสดงค่าของพารามิเตอร์ตัวที่มากกว่าโดยคำนวณ

$$\frac{(a + b) + \text{sgn}(a - b) * (a - b)}{2}$$



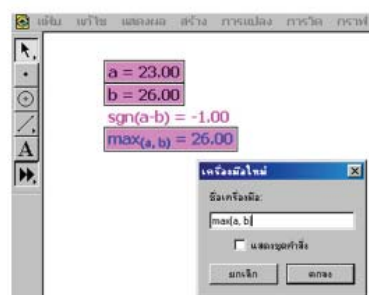
รูปที่ 5

4. กำหนดป้ายชื่อค่าที่คำนวณได้เป็น $\max(a, b)$ และทำเครื่องหมายในช่อง ใช้ป้ายชื่อในเครื่องมือกำหนดเอง

5. เก็บเป็นเครื่องมือกำหนดเองโดยเลือก พารามิเตอร์ a พารามิเตอร์ b และ ค่าที่คำนวณไว้ $\max(a, b)$ ตามลำดับ แล้วไปเลือกคำสั่ง สร้างเครื่องมือใหม่ จากกล่องเครื่องมือ กำหนดเอง ตั้งชื่อเครื่องมือใหม่เป็น $\max(a, b)$



ก)



ข)

รูปที่ 6

6. ให้ Sketchpad แสดงค่าของพารามิเตอร์ตัวที่น้อยกว่าโดยคำนวณ

$$\frac{(a + b) - \text{sgn}(a - b)(a - b)}{2}$$

7. กำหนดป้ายชื่อค่าที่คำนวณได้เป็น $\min(a, b)$ และทำเครื่องหมายในช่อง ใช้ป้ายชื่อในเครื่องมือกำหนดเอง

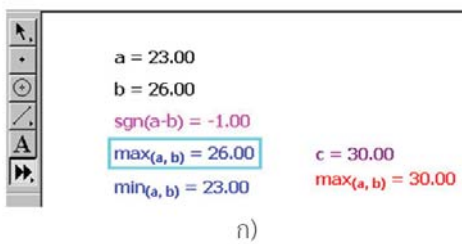
8. เก็บเป็นเครื่องมือกำหนดเองโดยเลือก พารามิเตอร์ a พารามิเตอร์ b และ ค่าที่คำนวณไว้ $\min(a, b)$ ตามลำดับ แล้วไปเลือกคำสั่ง **สร้างเครื่องมือใหม่** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง ตั้งชื่อเครื่องมือใหม่เป็น $\min(a, b)$

ถ้ามีจำนวนสามจำนวนเราจะหาจำนวนที่มีค่ามากที่สุดได้อย่างไร วิธีที่ใช้ก็คือเปรียบเทียบจำนวนทีละคู่ แต่ในโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เมื่อสร้างเครื่องมือกำหนดเองแล้วเราก็สามารถหาจำนวนที่มากที่สุดของสามจำนวนนั้นได้โดยการเลือกเครื่องมือกำหนดเอง แล้วคลิกจำนวนทั้งสาม

สร้างเครื่องมือกำหนดเอง $\max(a, b, c)$ และ $\min(a, b, c)$

9. สร้างพารามิเตอร์ c

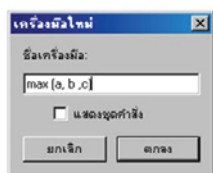
10. ให้ Sketchpad แสดงค่าของพารามิเตอร์ตัวที่มีค่ามากที่สุดของ $a, b,$ และ c โดยเลือกเครื่องมือกำหนดเอง $\max(a, b)$ ที่สร้างไว้ จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง แล้วคลิกค่าที่พารามิเตอร์ c และ ค่าที่คำนวณไว้ $\max(a, b)$ (รูปที่ 7 ก)



ก)

a = 23.00
b = 26.00
sgn(a-b) = -1.00
max(a, b) = 26.00
min(a, b) = 23.00

c = 30.00
max(a, b, c) = 30.00



ข)

รูปที่ 7

11. กำหนดป้ายชื่อค่าที่คำนวณได้เป็น $\max(a, b, c)$ และทำเครื่องหมายในช่อง ใช้ป้ายชื่อในเครื่องมือกำหนดเอง

12. เก็บเป็นเครื่องมือกำหนดเองโดยเลือก พารามิเตอร์ a พารามิเตอร์ b พารามิเตอร์ c และ ค่าที่คำนวณไว้ $\max(a, b, c)$ ตามลำดับ แล้วไปเลือกคำสั่ง **สร้างเครื่องมือใหม่** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง ตั้งชื่อเครื่องมือใหม่เป็น $\max(a, b, c)$ (รูปที่ 7 ข)

13. สร้างเครื่องมือกำหนดเอง $\min(a, b, c)$ โดยใช้ขั้นตอนแบบเดียวกับที่สร้างเครื่องมือกำหนดเอง $\max(a, b, c)$

ในการทำงานเดียวกันถ้ามีจำนวนมากกว่าสามจำนวนเราก็สามารถใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หาจำนวนที่มากที่สุดได้

ขณะนี้เรามีเครื่องมือพร้อมแล้ว ต่อไปก็เป็นการสร้างแบบจำลองเพื่อการสืบเสาะหาขนาดของกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่น้อยที่สุดสำหรับตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

วิธีสร้างแบบจำลอง

1. สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ที่มีความยาวด้านเท่ากับ 5 เซนติเมตร และสามารถลากจุดยอดมุมทั้งสามเพื่อให้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าหมุนหรือย้ายตำแหน่งได้

2. วัดพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด A, จุด B, และจุด C

3. วัดพิกัดที่สอง (y) ของจุด A, จุด B, และจุด C

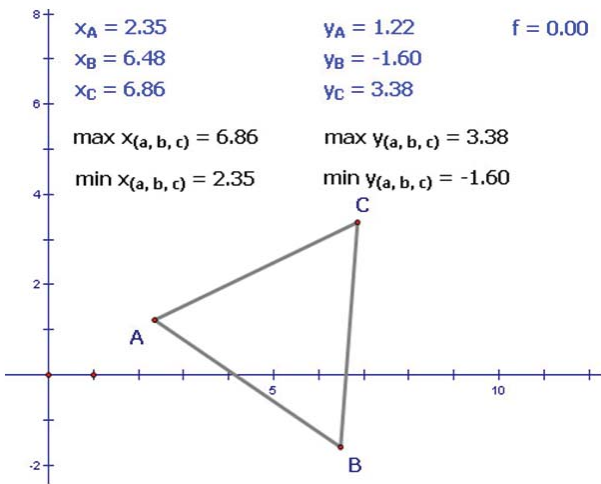
4. หาพิกัดที่หนึ่ง (x) ที่มีค่ามากที่สุดโดยเลือกเครื่องมือกำหนดเอง $\max(a, b, c)$ จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง แล้วคลิกค่าที่วัดไว้ $x_A, x_B,$ และ x_C และตั้งชื่อค่าที่วัดได้เป็น $\max_{(a,b,c)} x$

5. หาพิกัดที่หนึ่ง (x) ที่มีค่าน้อยที่สุดโดยเลือกเครื่องมือกำหนดเอง $\min(a, b, c)$ จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง แล้วคลิกค่าที่วัดไว้ $x_A, x_B,$ และ x_C และตั้งชื่อค่าที่วัดได้เป็น $\min_{(a,b,c)} x$

6. หาพิกัดที่สอง (y) ที่มีค่ามากที่สุดโดยเลือกเครื่องมือกำหนดเอง $\max(a, b, c)$ จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง แล้วคลิกค่าที่วัดไว้ $y_A, y_B,$ และ y_C และตั้งชื่อค่าที่วัดได้เป็น $\max_{(a,b,c)} y$

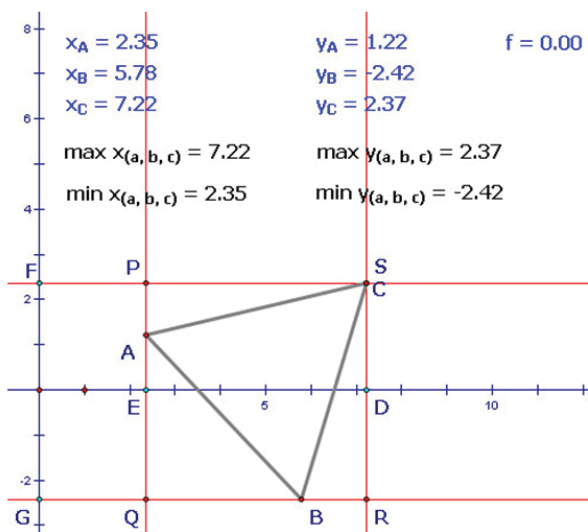
7. หาพิกัดที่สอง (y) ที่มีค่าน้อยที่สุดโดยเลือกเครื่องมือกำหนดเอง $\min(a, b, c)$ จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง แล้วคลิกค่าที่วัดไว้ $y_A, y_B,$ และ y_C และตั้งชื่อค่าที่วัดได้เป็น $\min_{(a,b,c)} y$

8. สร้างพารามิเตอร์ f และกำหนดให้ f เท่ากับ 0



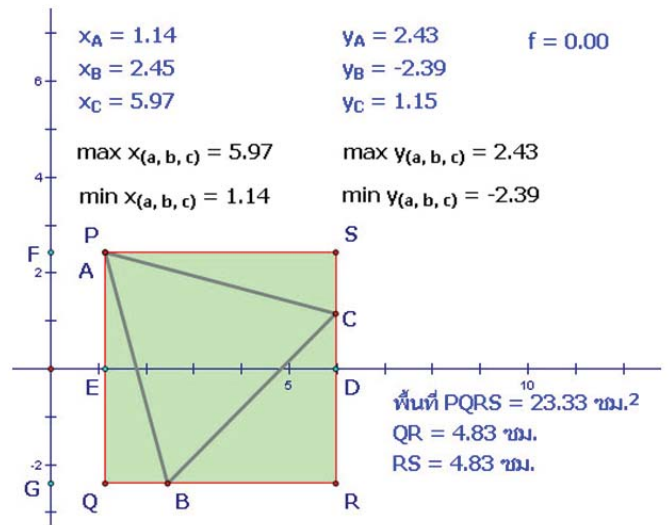
รูปที่ 8

9. เลือกค่าที่วัดไว้ $\max x_{(a,b,c)}$ และพารามิเตอร์ f ตามลำดับ แล้วเลือกคำสั่งลงจุดแบบ (x,y) จากเมนูกราฟ ได้จุด D
10. ที่จุด D สร้างเส้นตรงขนานกับแกน Y
11. เลือกค่าที่วัดไว้ $\min x_{(a,b,c)}$ และพารามิเตอร์ f ตามลำดับ แล้วเลือกคำสั่งลงจุดแบบ (x,y) จากเมนูกราฟ ได้จุด E
12. ที่จุด E สร้างเส้นตรงขนานกับแกน Y
13. เลือกพารามิเตอร์ f และ ค่าที่วัดไว้ $\max y_{(a,b,c)}$ ตามลำดับ แล้วเลือกคำสั่งลงจุดแบบ (x,y) จากเมนูกราฟ ได้จุด F
14. ที่จุด F สร้างเส้นตรงขนานกับแกน X
15. เลือกพารามิเตอร์ f และ ค่าที่วัดไว้ $\min y_{(a,b,c)}$ ตามลำดับ แล้วเลือกคำสั่งลงจุดแบบ (x,y) จากเมนูกราฟ ได้จุด G
16. ที่จุด G สร้างเส้นตรงขนานกับแกน X
17. สร้างจุดตัด P, Q, R, และ S จากเส้นตรงทั้งสี่เส้นที่สร้างขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 9



รูปที่ 9

18. ซ่อนเส้นตรงทั้งสี่เส้นแล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยม PQRS
19. วัดพื้นที่ และความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยม PQRS



รูปที่ 10

ถึงตอนนี้เราก็สร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก PQRS ที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ได้แล้ว และไม่ว่าเราจะหมุนหรือย้ายรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ไปอย่างไร รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก PQRS ก็ยังล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC อยู่เสมอ ตอนต่อไปก็คงเป็นหน้าที่ของท่านผู้อ่านที่จะต้องไปสืบเสาะดูว่าควรจะวางรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทำไหนจึงจะทำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ล้อมรอบมีพื้นที่มากที่สุด

ที่สุดท้าย...ท้ายที่สุด

ต้องขอขอบคุณฟังก์ชัน sgn ที่ทำให้เราสร้างแบบจำลองนี้ได้ไม่ยาก ฟังก์ชัน sgn ยังนำไปประยุกต์ใช้ได้อีกมากมายขึ้นอยู่กับความสามารถและประสบการณ์ของผู้ใช้ และแน่นอนครับปัญหาของเด็กหญิงตุ๊กตาก็ยังคงเป็นปัญหาของเด็กหญิงตุ๊กตาอยู่ ใครจะช่วยเธอแก้ปัญหาที่เขินจนครบอย่าลืมนะว่าฟังก์ชัน sgn ช่วยได้ดีทีเดียว

